FUNCIONES Y GRÁFICAS

Laura DE MIGUEL TURULLOLS

Representación e interpretación de funciones y gráficas por estudiantes de 4º ESO

TFM 2013

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Representación e interpretación de funciones y gráficas por alumnos de 4º ESO

Laura De Miguel Turullols

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

Página

Representación e Interpretación de funciones y gráficas por estudiantes de 4º ESO

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar las funciones reales y sus gráficas.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre las funciones y sus gráficas, que se ha puesto en marcha en un aula de 4º ESO en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

Funciones y gráficas en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de las funciones y sus gráficas en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En los dos primeros, se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a funciones y gráficas en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 4º ESO Opción B, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1

Funciones y gráficas en el currículo vigente

Se presenta un análisis de cómo se desarrollan los contenidos del tema de funciones a lo largo del currículo, desde el tercer ciclo de Educación Primaria hasta el Bachillerato, considerando las distintas opciones en 4º de E.S.O. y los diferentes itinerarios formativos en el Bachillerato.

El estudio longitudinal de los contenidos de funciones y sus representaciones gráficas se estructura en tablas, que buscan identificar los núcleos de continuidad y las ausencias y presencias en los distintos niveles según diversos descriptores, que abarcan la totalidad de conceptos que se van a introducir durante la escolarización: representación de funciones (C1), interpretación de funciones (C2), estudio de familias de funciones (C3) y álgebra de funciones (C4).

La mayoría de la información extraída del currículo de la ESO pertenece al *bloque 5: funciones y gráficas*, por lo que sólo se especificará bloque si el contenido explícito pertenece a un apartado diferente.

Asimismo, la información extraída en Bachillerato, mientras no se indique lo contrario, pertenecerá el *bloque análisis*, que corresponde al bloque 3 en el Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología y al bloque 2 en el Bachillerato de Ciencias Sociales.

En todo el ciclo de la ESO se repite "*Bloque 1: Contenidos comunes: Utilización de herramientas tecnológicas para las representaciones funcionales*", sin ninguna modificación o cambio, por lo que se ha excluido de las tablas, ya que no permite comparar el currículo en los distintos cursos.

También se han descartado los contenidos relacionados con derivadas e integrales de funciones, ya que el núcleo de este trabajo es la Teoría de funciones en sentido estricto, y no el "Cálculo" o el "Análisis matemático" en el sentido extenso.

1.1 Contenidos en el tercer ciclo de Educación Primaria

Aunque el Máster sólo cualifica para la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, parece sensato conocer qué conocimientos se han introducido en los últimos años de Primaria para realizar un buen estudio de los primeros años de la ESO.

En la Tabla 1 se muestran los contenidos en el tercer ciclo de Educación Primaria. En este curso aún no hay un bloque específico de funciones, por lo que los contenidos se refieren principalmente a geometría y tratamiento de la información. Asimismo, se ha añadido la ordenación de los números en la recta real por considerarse imprescindible para una correcta representación gráfica.

Tabla 1. Contenidos en el tercer ciclo de Primaria

Descriptor	Contenido tercer ciclo de Primaria
C1: Representación de funciones	Bloque 1. Números y operaciones Ordenación de números enteros, de decimales y de fracciones por comparación y representación gráfica. Bloque 3: Geometría Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de movimientos por medio de coordenadas. Bloque 4: Tratamiento de la información, azar y probabilidad Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara. Obtención y utilización de información para la realización de gráficos.
C2: Interpretación de funciones	Bloque 3: Geometría La representación elemental de gráficas sencillas.
C3: Estudio de familias de funciones	—
C4: Álgebra de funciones	—

1.2 Contenidos en la ESO

A diferencia del currículo de Primaria, el de Secundaria contiene un bloque específico de funciones y gráficas (bloque 5). En la Tabla 2 se muestran los contenidos correspondientes al primer ciclo de la ESO. En la primera columna, los contenidos de 1º ESO, se refieren a la representación puntual e interpretación de funciones lineales y de proporcionalidad directa. En la segunda columna, los contenidos de 2º de la ESO repasan los contenidos de 1º ESO y añaden las nuevas tecnologías y las primeras propiedades de funciones.

Tabla 2. Contenidos en el primer ciclo de la ESO

Descriptor	Contenido 1º ESO	Contenido 2º ESO
C1: Representación de funciones	Coordenadas cartesianas. Representación de puntos en un sistema de ejes coordenados. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas. Organización de datos en tablas de valores.	Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla. Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción de gráficas.
C2: Interpretación de funciones	Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla o representadas en una gráfica. Detección de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación. Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Identificación y verbalización de relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.	Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica. Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales. Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos. Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la interpretación de gráficas.
C3: Estudio de familias de funciones	—	—
C4: Álgebra de funciones	—	—

En el segundo ciclo de la ESO empiezan a aparecer las primeras familias de funciones, cuyo estudio se amplía con más familias en 4º ESO, como se ve en la Tabla 3a. Además, en 3º se encuentran menos contenidos de representación de funciones, adquiriendo mucha más importancia su interpretación.

Tabla 3a. Contenidos en el segundo ciclo de la ESO

<table>
<tr><th>Descriptor</th><th>Contenido 3º ESO</th><th>Contenido 4º ESO
Opción A</th><th>Contenido 4º ESO
Opción B</th></tr>
<tr><td>C1:
Representación de funciones</td><td>—</td><td colspan="2">Bloque 3: Álgebra:
Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.

Bloque 3:Álgebra
Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.</td></tr>
<tr><td>C2:
Interpretación de funciones</td><td>Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.

Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte.

Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.

Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.

Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas.</td><td>Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.</td><td>Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.

Búsqueda e interpretación de situaciones reales con funciones definidas a trozos.</td></tr>
</table>

Tabla 3b. Contenidos en el segundo siclo de la ESO

Descriptor	Contenido 3º ESO	Contenido 4º ESO Opción A	Contenido 4º ESO Opción B
C3: Estudio de familias de funciones	Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. Utilización de las distintas formas de representar la ecuación de la recta.	Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Utilización de tecnologías de la información para su análisis.	Funciones definidas a trozos. Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales. Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.
C4: Álgebra de funciones	—	La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.	

1.3 Contenidos en Bachillerato

En la Tabla 4 se presentan los contenidos del currículo de mínimos de ambos cursos de Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología. En el primer curso, los contenidos se refieren a interpretación de funciones y sus propiedades algebraicas, mientras que en el 2º curso, sólo se trabajan los límites y la continuidad centrándose mucho más en derivadas e integrales que, como se comentó anteriormente, quedan excluidos de este trabajo.

Tabla 4. Contenidos en Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología

Descriptor	Contenido 1º Bachillerato	Contenido 2º Bachillerato
C1: Representación de funciones	—	—
C2: Interpretación de funciones	Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales. Aproximación al concepto de límite de una función tendencia y continuidad. Bloque 1: Aritmética y álgebra: Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones.	—
C3: Estudio de familias de funciones	Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Bloque 2: Geometría Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.	—
C4: Álgebra de funciones	Dominio, recorrido y extremos de una función. Operaciones y composición de funciones.	Concepto de límite de una función. Cálculo de límites. Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad.

Finalmente, en la Tabla 5 se presentan los contenidos del Bachillerato de Ciencias Sociales. A diferencia de lo que ocurría en Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnológico se realiza un estudio mucho más general y aparecen contenidos en todos los aspectos destacados: representación (C1), interpretación (C2), estudio de familias (C3) y álgebra de funciones (C4).

Tabla 5. Contenidos en Bachillerato de Ciencias Sociales

Descriptor	Contenido 1º Bachillerato	Contenido 2º Bachillerato
C1: Representación de funciones	Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o de gráficas.	Representación gráfica de una función polinómica o racional sencilla a partir de sus propiedades globales. Bloque 1: Álgebra Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Programación lineal. Aplicaciones a la resolución de problemas sociales, económicos y demográficos. Interpretación de las soluciones.
C2: Interpretación de funciones	Utilización de las funciones como herramienta para la resolución de problemas y la interpretación de fenómenos sociales y económicos.	Aproximación al concepto de límite a partir de la interpretación de la tendencia de una función.
C3: Estudio de familias de funciones	Interpolación y extrapolación lineal. Aplicación a problemas reales. Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera y racionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos.	Estudio de una función polinómica o racional sencilla a partir de sus propiedades globales.
C4: Álgebra de funciones	Aspectos globales de una función. Tasa de variación. Tendencias.	Concepto de continuidad. Interpretación de los diferentes tipos de discontinuidad y de las tendencias asintóticas en el tratamiento de la información.

Capítulo 2
Criterios de evaluación de funciones y gráficas en el currículo vigente

El capítulo anterior se centra en los contenidos de funciones y gráficas del currículo vigente. Sin embargo, un estudio con mayor profundidad exige analizar también los criterios de evaluación.

Repitiendo el formato anterior, se presentan las siguientes tablas donde aparecen los criterios de evaluación del currículo ordenados según el curso al que pertenecen.

2.1 Criterios de evaluación en el tercer ciclo de Primaria

Los criterios de evaluación en el tercer ciclo de Primaria, como ocurría con los contenidos, se refieren a la representación e interpretación de funciones como puede verse en la Tabla 6.

Tabla 6. Criterios de evaluación en el tercer ciclo de Primaria

Descriptor	Criterios de evaluación tercer ciclo de Primaria
CE1: Representación de funciones	Ordenar, utilizando razonamientos apropiados, distintos tipos de números. Con este criterio se pretende comprobar el manejo, en situaciones tomadas de la vida real, de diferentes tipos de números, interpretando su valor y siendo capaces de comparar e intercalar números escritos de diferentes maneras.
CE2: Interpretación de funciones	Interpretar una representación espacial realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares. Este criterio pretende evaluar el desarrollo de capacidades en relación con puntos de referencia y, en ciertos casos, ejes de coordenadas, mediante representaciones de espacios familiares. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato. Este criterio trata de comprobar la capacidad de recoger y registrar una información que se pueda cuantificar, de utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales... y de comprender y comunicar la información así expresada.
CE3: Estudio de familias de funciones	—
CE4: Álgebra de funciones	—

2.2 Criterios de evaluación en la ESO

Los criterios de evaluación en 1º ESO (primera columna de la Tabla 7) se refieren tanto a la representación de funciones como a su interpretación, mientras que en 2º ESO (segunda columna de la Tabla 7) se refieren únicamente a la interpretación.

Tabla 7. Criterios de evaluación en el primer ciclo de la ESO

Descriptor	Criterios de evaluación 1º ESO	Criterios de evaluación 2º ESO
CE1: Representación de funciones	Evaluar el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados.	—
CE2: Interpretar funciones	Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.	Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado. Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, en especial el paso de la gráfica correspondiente a una relación de proporcionalidad a cualquiera de los otros tres: verbal, numérico o algebraico. Se trata de evaluar también la capacidad de analizar una gráfica y relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.
CE3: Estudio de familias de funciones	—	—
CE4: Álgebra de funciones	—	—

A pesar de que en los contenidos de 3º ESO adquiere una mayor importancia la interpretación de funciones, como criterio de evaluación se considera suficiente la interpretación de situaciones de la vida cotidiana que pueden ser expresadas mediante funciones lineales como queda reflejado en la Tabla 8.

Tabla 8a. Criterios de evaluación en segundo ciclo de la ESO

<table>
<tr><th>Descriptor</th><th>Criterios de evaluación 3º ESO</th><th>Criterios de evaluación 4º ESO Opción A</th><th>Criterios de evaluación 4º ESO Opción B</th></tr>
<tr><td>CE1: Representación de funciones</td><td colspan="2">Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente a ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica se combina también con otros métodos numéricos y gráficos, mediante el uso adecuado de los recursos tecnológicos.</td><td>Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos y métodos algebraicos para resolver problemas. Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad de usar el álgebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas y utilizar sus métodos en la resolución de problemas mediante inecuaciones, ecuaciones y sistemas.</td></tr>
<tr><td>CE2: Interpretación de funciones</td><td>—</td><td>Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento. A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de las tasas de variación a partir de los datos gráficos o numéricos.</td><td>A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de la tasa de variación media a partir de los datos gráficos, numéricos o valores concretos alcanzados por la expresión algebraica.</td></tr>
</table>

Tabla 8b. Criterios de evaluación en segundo ciclo de la ESO

Descriptor	Criterios de evaluación 3º ESO	Criterios de evaluación 4º ESO Opción A	Criterios de evaluación 4º ESO Opción B
CE3: Estudio de familias de funciones	Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica. Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado	Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático o exponencial, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información.	Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático, de proporcionalidad inversa, exponencial o logarítmica, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información.
CE4: Álgebra de funciones	—	—	—

2.3 Criterios de evaluación en Bachillerato

Como en Bachillerato se estudia mucha álgebra de funciones la posterior interpretación de funciones exige un estudio mucho más riguroso que en cursos anteriores por lo que los puntos CE2: Interpretación de funciones y CE4: Álgebra de funciones se entremezclan como puede verse en la Tabla 9.

Tabla 9a. Criterios de evaluación en Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología

Descriptor	Criterios de evaluación 1ºBachillerato	Criterios de evaluación 2º Bachillerato
CE1: Representación de funciones	Estimar los efectos de las operaciones sobre los números reales y sus representaciones gráfica y algebraica y resolver problemas extraídos de la realidad social y de la naturaleza que impliquen la utilización de ecuaciones e inecuaciones, así como interpretar los resultados obtenidos. Se pretende evaluar la comprensión de las propiedades de los números, del efecto de las operaciones y del valor absoluto y su posible aplicación.	Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico. Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados.
CE2: Interpretación de funciones	—	Transcribir problemas reales a un lenguaje algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto. Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida. Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en álgebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente.
CE3: Estudio de familias de funciones	Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. Particularmente, se pretende comprobar la capacidad de traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y extraer conclusiones sobre su comportamiento local o global. También se debe valorar la capacidad para traducir algebraicamente una situación y llegar a su resolución, haciendo una interpretación de los resultados obtenidos.	—

Tabla 9b. Criterios de evaluación en Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología

Descriptor	Criterios de evaluación 1ºBachillerato	Criterios de evaluación 2º Bachillerato
CE4: Álgebra de funciones	Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente. Se pretende comprobar con este criterio la capacidad de utilizar adecuadamente la terminología y los conceptos básicos del análisis para estudiar las características generales de las funciones y aplicarlas a la construcción de la gráfica de una función concreta. En especial, la capacidad para identificar regularidades, tendencias y tasas de variación, locales y globales, en el comportamiento de la función, reconocer las características propias de la familia y las particulares de la función, y estimar los cambios gráficos que se producen al modificar una constante en la expresión algebraica.	Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas algebraicamente en forma explícita. Se pretende comprobar con este criterio que los alumnos son capaces de utilizar los conceptos básicos del análisis y que han adquirido el conocimiento de la terminología adecuada y los aplican adecuadamente al estudio de una función concreta.

Al igual que ocurre en la Tabla 9, en la Tabla 10 se entremezclan los contenidos CE2 y CE4. Sin embargo, mientras en Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología los criterios se refieren principalmente a la terminología y los conceptos básicos del análisis, en el Bachillerato de Ciencias Sociales el propósito principal es resolver e interpretar problemas.

Tabla 10a. Criterios de evaluación en Bachillerato de Ciencias Sociales

Descriptor	Criterios de evaluación 1º	Criterio de evaluación 2º
CE1: Representación de funciones	Transcribir a lenguaje gráfico una situación relativa a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas.	Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, ecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.

Tabla 10b. Criterios de evaluación en Bachillerato de Ciencias Sociales

Descriptor	Criterios de evaluación 1ºBachillerato	Criterios de evaluación 2º Bachillerato
CE2: Interpretación de funciones	Transcribir a lenguaje algebraico una situación relativa a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas. Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir algebraicamente una situación y llegar a su resolución haciendo una interpretación contextualizada de los resultados obtenidos, más allá de la resolución mecánica de ejercicios que sólo necesiten la aplicación inmediata de una fórmula, un algoritmo o un procedimiento determinado. Utilizar las tablas y gráficas como instrumento para el estudio de situaciones empíricas relacionadas con fenómenos sociales y analizar funciones que no se ajusten a ninguna fórmula algebraica. Este criterio está relacionado con el manejo de relaciones no expresadas en forma algebraica. Se dirige a comprobar la capacidad para ajustar a una función conocida los datos extraídos de experimentos concretos y obtener información suplementaria mediante técnicas numéricas	Analizar e interpretar fenómenos habituales en las ciencias sociales susceptibles de ser descritos mediante una función, a partir del estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características. Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir al lenguaje de las funciones determinados aspectos de las ciencias sociales y para extraer, de esta interpretación matemática, información que permita analizar con criterios de objetividad el fenómeno estudiado y posibilitar un análisis crítico a partir del estudio de las propiedades globales y locales de la función.
CE3: Estudio de familias de funciones	Relacionar las gráficas de las familias de funciones con situaciones que se ajusten a ellas; reconocer en los fenómenos económicos y sociales las funciones más frecuentes e interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, gráficas o expresiones algebraicas. Se trata de evaluar la destreza para realizar estudios del comportamiento global de las funciones a las que se refiere el criterio: polinómicas; exponenciales y logarítmicas; valor absoluto; parte entera y racionales sencillas, sin necesidad de profundizar en el estudio de propiedades locales desde un punto de vista analítico. La interpretación, cualitativa y cuantitativa, a la que se refiere el enunciado exige apreciar la importancia de la selección de ejes, unidades, dominio y escalas.	—
CE4: Álgebra de funciones	—	—

Capítulo 3
Tipos de ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre funciones y gráficos en los libros de texto

En los capítulos anteriores se ha realizado un estudio longitudinal de los contenidos del currículo (capítulo 1) y de los criterios de evaluación, como concreción de dichos contenidos (capítulo 2) relativos a las funciones y sus representaciones gráficas. Sin embargo, la realidad en el aula depende tanto del currículo oficial como de su desarrollo en los libros de texto. Por ello, se estudia en este capítulo la concreción de los contenidos y criterios de evaluación en los libros de texto.

Como el posterior estudio de este trabajo se centrará en 4º ESO opción B se ha decidido analizar los libros de este curso y los de dos cursos anteriores y dos posteriores, es decir, desde 2º ESO hasta 2º Bachillerato.

El estudio se ha centrado en las actividades de los temas de funciones y gráficas y pretende ser representativo de los ejercicios, problemas y cuestiones allí encontrados.

3.1 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º ESO

Las funciones y gráficas se desarrollan en un único tema en el libro de referencia de 2º ESO (Álvarez, 2008). Este tema, situado como una de las últimas lecciones, ocupa 20 páginas y contiene 89 actividades distribuidas entre ejercicios, problemas y cuestiones.

La Tabla 11, pretende ser representativa del tipo de actividades del tema, mientras que la Tabla 12, contiene un problema que no representa al tipo de actividades que se han encontrado, pero que merece ser destacada ya que relaciona los centímetros (del sistema métrico decimal) con las pulgadas (sistema métrico anglosajón).

Tabla 11a. Actividades en el libro de 2º ESO (Álvarez, 2008, págs. 241-260)

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☑ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Tras la introducción teórica de una noción o procedimiento matemáticos, se proponen algunos ejercicios que culminan con algunas cuestiones para valorar la comprensión del concepto explicado en la página.
Ejemplo:

REFLEXIONA

24 ¿Cuántos puntos de corte con el eje *X* tiene una función del tipo $y = x + a$? ¿Y con el eje *Y*?

25 Dibuja una gráfica que no tenga puntos de corte con los ejes.

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: El ejercicio pide una representación gráfica de una función expresada mediante un enunciado sencillo. Con ello se consiguen trabajar también los números enteros y sus operaciones.
Ejemplo:

53. ●● Dada la función que asocia a cada número su opuesto más 5:

a) Halla su expresión algebraica.
b) Calcula $f(2)$ y $f(-2)$.
c) Representa la función.

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Estudio de propiedades sencillas de una función a partir de su gráfica: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, etc.
Ejemplo:

57. ●● Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las gráficas de las siguientes funciones:

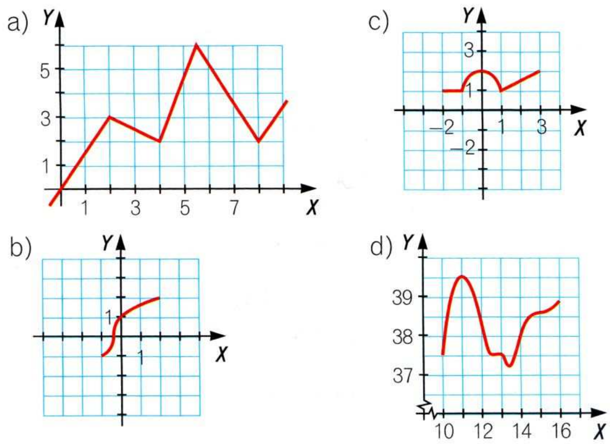
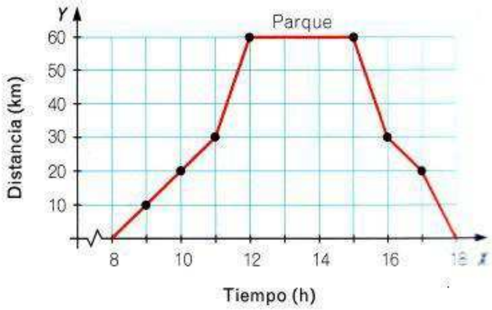


Tabla 11b Actividades en el libro de 2º ESO (Álvarez, 2008, pág. 241-260)

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☑ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Presentación de una gráfica asociada a una situación real espacio-tiempo donde es necesario interpretar la gráfica para contestar a las preguntas.
Ejemplo:

79. ●● Hacemos una excursión en bicicleta a un parque situado a 60 km. Para llegar hay que recorrer un camino con subidas y bajadas. Después, descansamos y regresamos.



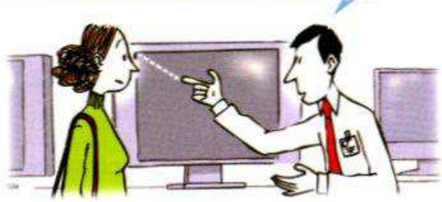
a) ¿Qué significado tienen los números situados en el eje de abscisas? ¿Y los del eje de ordenadas?
b) ¿A qué hora salimos?
c) ¿Cuántos kilómetros hay desde el comienzo de la primera cuesta hasta la cima?
d) ¿Cuánto tiempo tardamos en subirla? ¿Y en bajarla?
e) ¿Cuánto tiempo estamos en el parque?
f) ¿Cómo es el camino de regreso?
g) ¿En qué tramo crece la función? ¿Dónde decrece?
h) ¿Es una función continua?

Tabla 12. Otras actividades reseñables del libro de 2º ESO (Álvarez, 2008, pág. 260)

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☑ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: En este problema se ve la utilidad de las funciones a la par que se aprenden hábitos saludables. Además, introduce las pulgadas, que a pesar de ser una unidad del sistema de medida anglosajón también se utilizan aquí en determinadas medidas (como los televisores).
Ejemplo:

87. ●●● El tamaño de un televisor se suele expresar en pulgadas. La pulgada es una unidad de medida del sistema anglosajón cuya equivalencia es 1 pulgada = 2,54 cm.

Un televisor de 24 pulgadas tiene:
- Una diagonal de: $d = 24 \cdot 2{,}54 = 60{,}96$ cm.
- Una base de: $b = \frac{7{,}62 \cdot p}{5} = \frac{7{,}62 \cdot 24}{5} = 36{,}58$ cm.



Según las recomendaciones de la Asociación Nacional de Ópticos, el tamaño del televisor ha de mantener cierta relación con la distancia a la que nos debemos situar del mismo.

Una sencilla regla para calcular la distancia mínima aconsejable es multiplicar por 5 el número de pulgadas que tiene el televisor. El resultado es la distancia mínima (en centímetros) a la que nos debemos situar.

Por la forma de la habitación podemos situar el sillón a 1,40 m y 1,80 m del televisor.

¿Cuántas pulgadas puede tener el televisor? ¿Cuánto debe medir como mínimo el largo de la mesa sobre la que va situado?

3.2 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO

El contenido de funciones y gráficas en el libro de texto de 3º ESO (Vizmanos, 2006) se distribuye en dos temas: el primero explica las características y propiedades generales de las funciones y el segundo se centra en las familias de funciones lineales y cuadráticas. En total hay 135 actividades; 62 correspondientes al primer tema y 73 al segundo.

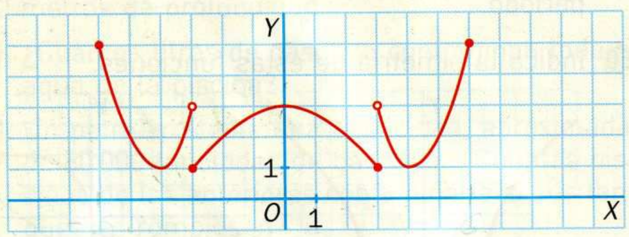
Igual que antes, las Tablas 13 y 14 pretenden ser representativas (Tabla 13) y destacar alguna actividad (Tabla 14).

Se propone un gran número de problemas de interpretación de gráficas espacio-tiempo, parecidos al problema 79 de 2º ESO (Álvarez, 2008, pág. 260) adjunto en la Tabla 11b. En esta etapa, además de la interpretación gráfica, se proponen problemas cuyo objetivo es el paso de una descripción verbal de una función a la representación gráfica.

Tabla 13a. Actividades en el libro de 3º ESO (Vizmanos, 2006, págs. 206-241)

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Estudio de una gráfica y sus propiedades. Empiezan a aparecer funciones en las que se pide mirar simultáneamente todas sus propiedades y no propiedades aisladas.
Ejemplo:

1 Halla el dominio, recorrido, máximos y mínimos, discontinuidades, crecimiento y decrecimiento, y simetrías de la siguiente función.



Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☑ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Dejando aparte los problemas de distancia y tiempo, se encuentran todo tipo de problemas geométricos.
Ejemplo:

16 Con 5 metros de moldura se quiere construir un marco de forma rectangular y área máxima. ¿Cuáles serán sus dimensiones?

17 De todos los triángulos rectángulos cuya suma de catetos es 10 centímetros, ¿cuál es el que tiene mayor superficie?

Tabla 13b. Actividades en el libro de de 3º ESO (Vizmanos, 2006, págs. 206-241)

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Representación de funciones lineales con distintas pendientes y ordenadas en el origen.
Ejemplo:

Representación y aplicación de una función lineal

25 Representa las siguientes funciones lineales.

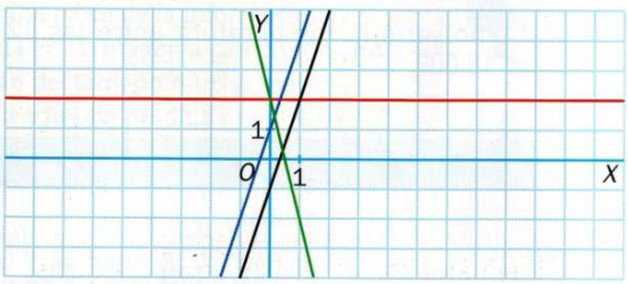
a) $y = 3x - 2$ d) $y = -\frac{2}{3}x + 3$

b) $y = -2x - 1$ e) $y = x - \frac{1}{2}$

c) $y = \frac{1}{4}x$ f) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Se dan varias funciones lineales y hay que vincular cada una con su expresión algebraica. Aparecen varios ejercicios de este estilo con funciones lineales y cuadráticas.
Ejemplo:

55 Relaciona cada gráfica con su ecuación.



a) $y = -4x + 2$ c) $y = 2$

b) $y = 3x + 1$ d) $y = 3x - 1$

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: En la parte final del bloque, explica cómo dibujar las funciones lineales y cuadráticas con el programa Derive. Debajo se muestran los ejercicios pedidos para funciones lineales.
Ejemplo:

1. Representa las funciones lineales: $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$, $y = -x$, $y = -2x$, e $y = -3x$, en la misma gráfica.
2. Representa en la misma gráfica las funciones lineales: $y = 2x + 1$, $y = -2x + 1$, e $y = -3$.
3. Representa las funciones lineales: $y = 2x + 15$, e $y = -2x - 10$, en la misma gráfica, y modifica el aspecto de la pantalla para que se vean claramente las dos representaciones.

Tabla 14. Otras actividades reseñables en 3º ESO (Vizmanos, 2006, págs. 234)

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☑ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Añadimos este problema porque después se utilizará para analizar distintas cuestiones de la Educación Secundaria Obligatoria.
Ejemplo:

43 Juan recibe una factura mensual de 100 minutos de teléfono. Dos nuevas compañías telefónicas le realizan las siguientes ofertas.

a) ¿Cuál es más beneficiosa para Juan?

b) ¿Existe algún número de minutos consumidos en el que la factura sea la misma en las dos compañías?

3.3 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO

Como se han podido analizar libros de la misma editorial (SM) para ambas opciones de 4º ESO (Vizmanos, 2008), las actividades encontradas son bastante similares lo que permite realizar un primer estudio de las actividades comunes para las opciones A y B de 4º ESO.

En el libro de la Opción A (Vizmanos, 2008) las funciones y gráficas se distribuyen en tres temas. El primero, sobre generalidades de las funciones, contiene 86 actividades; el segundo, sobre la familia de funciones polinómicas y raciones, 82; y, finalmente, el tercero, sobre funciones exponenciales, 78 actividades.

El libro de la Opción B (Vizmanos, 2008) también se distribuye en tres temas, el primero sobre generalidades de las funciones con 88 actividades, el segundo sobre límites y continuidad con 70 actividades, y, el tercero, dedicado a las familias de funciones con 88.

Se repiten ejercicios del mismo estilo que el 55 de 3º ESO (Vizmanos, 2006) de la Tabla 13b en los que hay que vincular la expresión algebraica con su gráfica. En 4º de la ESO, como se estudian muchas más familias de funciones, aparecen con funciones cuadráticas, exponenciales, potenciales y trigonométricas (según la rama optativa).

Tabla 15. Actividades en los libros de 4º ESO Opción A y B (Vizmanos, 2008)

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Estudio de propiedades de la función. La diferencia en los apartados d según las opciones se debe a la diferencia de nociones introducidas: en la opción de Matemáticas A o B.
Ejemplo:

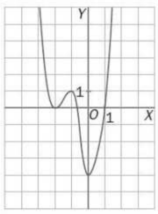
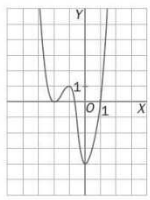
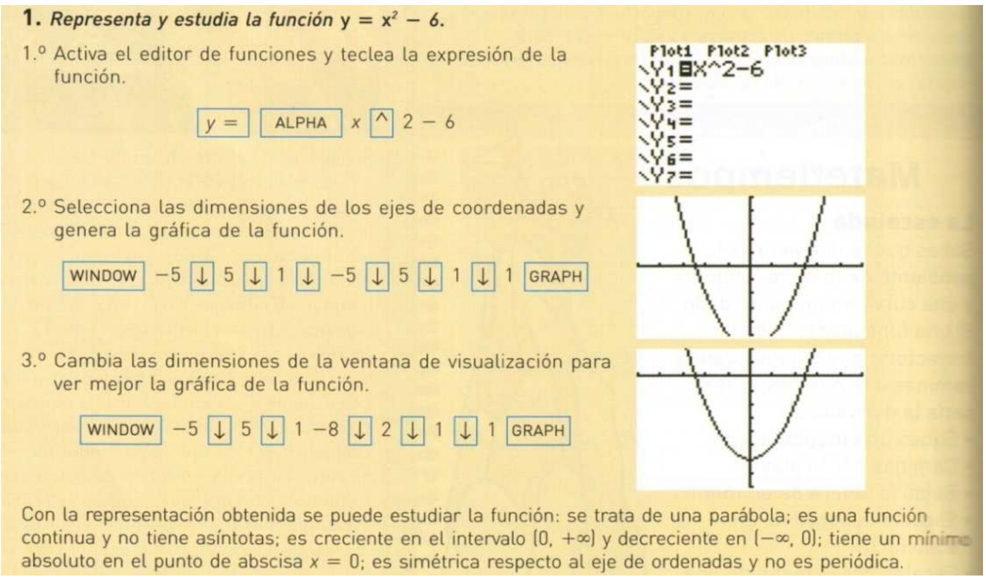
Opción A	Opción B
Observa la gráfica de la siguiente función.  a) Encuentra el dominio y el recorrido. b) Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento. c) Halla sus máximos y mínimos e indica de qué tipo son. d) ¿Es simétrica? ¿Y continua?	Observa la gráfica de la siguiente función.  a) Encuentra el dominio y el recorrido. b) Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento. c) Halla sus máximos y mínimos e indica de qué tipo son. d) ¿Qué tipo de acotación tiene?

Tabla 16. Otras actividades reseñables de 4º ESO Opción A y B (Vizmanos, 2008)

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Las nuevas tecnologías se vuelven a estudiar al final del bloque de funciones. Hay dos apartados, uno con Derive parecido al escaneado en 3º ESO y otro con calculadora gráfica que adjuntamos aquí abajo.
Ejemplo:



1. *Representa y estudia la función* $y = x^2 - 6$.

1.º Activa el editor de funciones y teclea la expresión de la función.

y = ALPHA x ^ 2 − 6

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=X^2−6
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=

2.º Selecciona las dimensiones de los ejes de coordenadas y genera la gráfica de la función.

WINDOW −5 ↓ 5 ↓ 1 ↓ −5 ↓ 5 ↓ 1 ↓ 1 GRAPH

3.º Cambia las dimensiones de la ventana de visualización para ver mejor la gráfica de la función.

WINDOW −5 ↓ 5 ↓ 1 −8 ↓ 2 ↓ 1 ↓ 1 GRAPH

Con la representación obtenida se puede estudiar la función: se trata de una parábola; es una función continua y no tiene asíntotas; es creciente en el intervalo $[0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0]$; tiene un mínimo absoluto en el punto de abscisa $x = 0$; es simétrica respecto al eje de ordenadas y no es periódica.

4º ESO (Opción B)

Como la segunda parte de este trabajo se centra en un aula de 4º ESO Opción B, resulta interesante centrarse en especial en los ejercicios de este libro. En él, se estudian como un tema aparte los límites de funciones y la continuidad. Las actividades más representativas se añaden en la Tabla 17.

Tabla 17. Actividades en el libro de 4º ESO Opción B (Vizmanos, 2008,págs. 200-201)

<table>
<tr><td>

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Dejando aparte la sección de problemas que contienen todos los temas del libro, el resto de las actividades del tema son ejercicios. En este caso se trata de hallar unos límites algebraicamente.

Ejemplo:

27 Calcula los límites que se indican.

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$ c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x + 2}{x^2 - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x + 2}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - x}{x^3 + 4x}$

</td></tr>
<tr><td>

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: La mayoría de los ejercicios de continuidad se plantean con funciones definidas a trozos que sólo se estudian en la Opción B-

Ejemplo:

33 Comprueba si son continuas las siguientes funciones definidas a trozos y, en caso negativo, especifica el tipo de discontinuidad que presentan.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + x & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 4}{3} & \text{si } x \leqslant -1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x} & \text{si } x \geqslant 8 \\ 2x - 6 & \text{si } x < 8 \end{cases}$

</td></tr>
</table>

3.4 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachillerato

1º Bachillerato Ciencias Sociales

Las funciones y gráficas se distribuyen en 5 temas en 1º Bachillerato de Ciencias Sociales (González, 2008). El primero, sobre las generalidades y propiedades globales de las funciones contiene 27 actividades, los tres siguientes sobre familias de funciones contienen 30, 30 y 35 respectivamente. El último trabaja los límites y continuidad con 32 actividades.

El primer tema es el que contiene mayor porcentaje de ejercicios. Los más frecuentes son los de interpretación de gráficas como el ejercicio 1 escaneado de 3º ESO (Vizmanos, 2006) adjunto en la Tabla 13a.

Posteriormente, encontramos varios temas con las familias de funciones que el currículo exige estudiar. Aquí aparecen una mayor cantidad de problemas como el adjunto en la Tabla 18 (Gonzalez, 2008).

Finalmente, en el último tema la mayoría de los ejercicios son de cálculo de límites como el 27 de 4º ESO Opción B (Vizmanos, 2008) expuesto en la Tabla 17. Sin embargo, aparecen unos nuevos ejercicios que piden hallar el límite gráficamente.

Tabla 18 Actividades en el libro de 1º Bachillerato de Ciencias Sociales (González, 2008, págs.116-200)

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☑ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Problema contenido en uno de los temas de familias de funciones donde se pide hallar su representación gráfica para, posteriormente, interpretarla.

Ejemplo:

10. Las funciones que aparecen a continuación, representan el beneficio, expresado en miles de euros, que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de dos productos distintos.

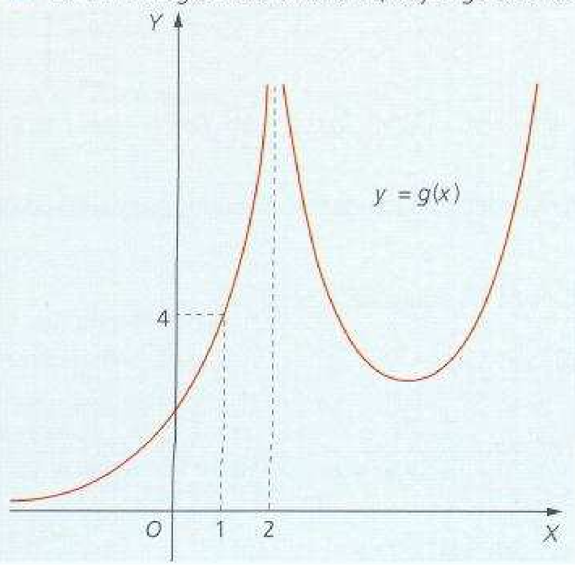
$$f(x) = \frac{1}{90}(-x^2 + 100x - 1\,600) \qquad g(x) = 10x - x^2 - 21$$

a) Representa gráficamente las funciones.
b) ¿Cuántas unidades hay que fabricar de cada producto para que no se produzcan pérdidas?
c) ¿Cuál es el mayor beneficio posible? ¿Cuántas unidades deben fabricarse?

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Finalmente, en el último tema la mayoría de los ejercicios son de cálculo de límites como el 27 de 4º ESO Opción B. Sin embargo, aparecen unos nuevos ejercicios que piden hallar el límite gráficamente.

Ejemplo:

4. En las siguientes funciones, cuyas gráficas se dan, calcula los valores pedidos:



h) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$ l) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$

i) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ m) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ n) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

k) Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales, si es que existen.

1º Bachillerato Ciencias de la Salud y Tecnológico

Los contenidos de funciones y gráficas en el libro de 1º Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnológico (Rey, 2008) se distribuyen en 3 temas. El primero sobre generalidades contiene 62 actividades, el segundo sobre familias, 92 y el último sobre límites, 109.

El primer tema repasa las propiedades generales de las funciones, añadiendo las operaciones y composición de funciones que se trabaja con ejercicios.

Los ejercicios de límites y continuidad son similares a los de 4º ESO Opción B (Vizmanos, 2008) adjuntos en la Tabla 17.

Tabla 19. Actividades en el libro de 1º Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnológico (Rey, 2008)

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Ejercicio de los más sencillos sobre inversas de funciones donde es necesario calcular la composición de f°f^{-1} y f^{-1}°f
Ejemplo:

47 Determina $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$ en los pares de funciones para comprobar si son inversas o no.

a) $f(x) = 3x - 1$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 1$

b) $f(x) = 2^x$ y $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $f(x) = 2^x$ y $f^{-1}(x) = \log_2 x$

d) $f(x) = sen\, x$ y $f^{-1}(x) = arc\, sen\, x$

e) $f(x) = x^2 + 2$ y $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: En el estudio de las familias de funciones, se añaden ejercicios sobre transformaciones de una función que ya se conoce como ocurre en este ejemplo con el seno.
Ejemplo:

64 Dibuja la gráfica de $y = sen\, x$ y, a partir de ella, haz la gráfica de estas funciones.

a) $y = -sen\, x$

b) $y = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = -2 + sen\, x$

d) $y = -sen\,(-x)$

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: En el último tema se añaden otros ejercicios de cálculo de asíntotas.
Ejemplo:

71 Determina todas las asíntotas de las funciones, y sitúa sus ramas infinitas.

a) $f(x) = \frac{2-6x}{x+3}$

b) $f(x) = \frac{3x^2+2x}{x+1}$

c) $f(x) = \frac{4x^3}{x-5}$

d) $f(x) = \frac{3}{x-1}$

e) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-5x+6}$

f) $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$

3.5 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º Bachillerato

2º Bachillerato Ciencias Sociales

El principal estudio sobre funciones y gráficas ya se ha realizado el año anterior por lo que en este año sólo aparecen en el libro un tema de repaso de límites y continuidad con 27 actividades y otro de representación gráfica con 29 actividades. En ambos temas las actividades son similares a las de la Tablas 17 y 18.

Tabla 20. Actividades en el libro de 2º Bachillerato de Ciencias Sociales (González, 2008, págs. 103-133, 186-211)

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Las actividades no cambian mucho pero se añade un nuevo apartado con problemas de acceso a la universidad como el adjunto.
Ejemplo:

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

■ 15. Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x < 0 \\ x + 2a & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ -x + b & \text{si } 2 < x \end{cases}$, calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua.

2º Bachiller Ciencias de la Salud y Tecnológico

Los contenidos en los que se centra el libro son las derivadas e integrales que se decidió dejar fuera del estudio de este trabajo. Por ello, solo se analizan dos temas que son repaso del año anterior: límites con 144 actividades y representación con 125.

Los ejercicios del tema de límites y continuidad siguen en la misma línea. Empiezan a aparecer una gran cantidad de ejercicios en los que se pide calcular el valor de determinados parámetros para que exista límite o la función sea continua como en el ejercicio 15 de 2º Bachillerato de Ciencias Sociales (Gonzalez, 2008) en la Tabla 20.

Tabla 21. Actividades en el libro de referencia de 2º Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnológico (Barbero, 2008)

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Aparecen por primera vez, algunos ejercicios en los que hay que aplicar teorema de Bolzano como en el adjunto. Más adelante, se seguirán necesitando en el tema de derivadas.
Ejemplo:

033 Determina si la función:

$$f(x) = sen\ x + cos\ x$$

se anula en algún punto del intervalo (0, 4).

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: En el estudio de funciones se añaden cada vez más propiedades. Aparecen ya la concavidad y convexidad como se ve en el ejercicio adjunto. Además, los máximos y mínimo se estudian mediante derivadas.
Ejemplo:

018 Estudia la concavidad y convexidad de estas funciones, y calcula los puntos de inflexión.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{-x^2+3}{x+2}$

Actividad tipo: ☑ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
Descripción: Las funciones ya no son sencillas por lo que se vuelve necesario estudiar las propiedades de la función para una correcta representación gráfica. Sin embargo, los ejercicios siguen el mismo estilo.
Ejemplo:

033 Representa esta función: $f(x) = \begin{cases} \left|-x^2-3x\right| & \text{si } x \leq 0 \\ -e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Capítulo 4

Coherencia en el currículo y entre el currículo y los libros de texto

Tras estudiar tanto el currículo vigente como los libros de texto, este último capítulo pretende fusionar la información hallada en cada una de las fuentes.

Primero, se resalta la información extraída del Currículo de Mínimos (4.1). Después, se comparan los contenidos y criterios de evaluación con los libros de texto en Secundaria (4.2.) y Bachillerato (4.3).

4.1 Coherencia en el currículo de mínimos

En el tercer ciclo de Primaria y el primero de la ESO, los contenidos y criterios de evaluación se refieren, principalmente, a los primeros apartados de representación de funciones (C1) y su interpretación (C2). Progresivamente, desde 3º ESO comienzan a introducirse las primeras familias de funciones (C3) y finalmente, los últimos años se amplía el estudio pasando de propiedades gráficas a su definición algebraica (C4).

En el bloque común de todos los cursos de la ESO se encuentra la utilización de herramientas tecnológicas para las representaciones funcionales. Sin embargo, en 1º ESO no se hace ninguna referencia ni en los contenidos ni en los criterios de evaluación. Las nuevas tecnologías se nombran en el currículo por primera vez en el bloque de funciones y gráficas en el curso de 2º ESO.

En 3º ESO se nombran como un contenido de la interpretación de funciones pero después no aparecen en los criterios de evaluación.

Por último, en 4º ESO ya no se nombran las herramientas tecnológicas para la interpretación de funciones sino para el análisis de las distintas familias de funciones estudiadas.

Dejando aparte las nuevas tecnologías los contenidos y criterios de evaluación encontrados en otros apartados tampoco se corresponden de forma exacta. Así, en 2º ESO aparece como un contenido la representación gráfica de funciones mientras que en criterios de evaluación sólo aparece la interpretación de funciones y gráficas.

En 3º ESO se habla por un lado de la interpretación de todo tipo de funciones y, por otro, del estudio en profundidad de la familia de funciones lineales. Mientras que, los criterios de evaluación sólo nombran las funciones lineales.

En la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones del currículo de mínimos de 3º ESO se nombra expresamente como criterio de evaluación el método gráfico: *"La resolución algebraica se combina también con otros métodos numéricos y gráficos"* mientras que en los contenidos sólo menciona los problemas sin especificar ninguna técnica: *"Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales"*.

El Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnológico, realiza un estudio más profundo de las funciones viendo los cambios que se producen en las gráficas al modificar las funciones. Además, exige una clasificación de las familias según sus características. Y finaliza el periodo escolar con un estudio de derivadas.

Por otro lado, el Bachillerato de Ciencias Sociales, resume el estudio de propiedades de funciones que se ha llevado a cabo en la ESO en *"Aspectos globales de una función"* y este queda sujeto a propiedades de funciones sencillas que representen problemas y situaciones reales. En 1º de Bachillerato se introduce la interpolación y extrapolación lineal y en 2º la programación lineal.

Otra diferencia en el currículo hace referencia al tipo de problemas de cada uno de los itinerarios de Bachillerato. En Ciencias Sociales, se trata de interpretar problemas de situación reales que describen fenómenos sociales y económicos (Tabla 10) mientras que en Ciencias de la Salud y Tecnológico se nombran los fenómenos naturales, geométricos y tecnológicos (Tabla 9).

4.2 Correspondencia en el currículo de mínimos y los libros de texto de la ESO

A pesar de que las nuevas tecnologías se nombran como un contenido, en el libro analizado de 2º ESO (Álvarez, 2008) hay un único tema correspondiente al bloque de funciones y no contiene nada sobre nuevas tecnologías ni calculadora.

En el problema 79 adjunto en la Tabla 11 aparece un "*efecto topaze*". Los autores del libro, conscientes de las dificultades de la interpretación de gráficas espacio-tiempo, explican en el propio enunciado del problema la situación, simplificándola en exceso.

Además de destacar el problema de la Tabla 12 por relacionar el sistema métrico decimal y anglosajón, también se puede resaltar porque resulta ser el único problema que auna varias materias: las matemáticas y hábitos saludables.

En las Tablas 13 y 16 de actividades de 3º ESO (Vizmanos, 2006) y 4º ESO (Vizmanos, 2008) se han añadido como ejercicios representativos algunos relacionados con programas informáticos a pesar de que su número no es excesivo. Sin embargo resultan representativos, ya que las nuevas tecnologías se encuentran en un apartado diferente, como contenido en sí mismo, y no como una mera herramienta para trabajar las funciones.

En los libros del segundo ciclo de la ESO analizados (Vizmanos, 2006-2008) podemos encontrar varios contenidos que se adelantan al currículo de mínimos. Así, destaca el estudio de las funciones cuadráticas mucho más en profundidad en 3º ESO, convirtiéndose en ambas opciones de 4º ESO como un repaso. También en la opción B de 4º ESO el libro se adelanta al currículo al estudiar las operaciones con funciones (que no se nombran explícitamente en el currículo de mínimos hasta 1º Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnológico) y, dentro de las familias de funciones, comienza a trabajar las funciones trigonométricas.

A pesar de que todos los libros estudiados poseen un apartado de problemas, la mayoría de las actividades resultan ser ejercicios; como queda resaltado por la gran mayoría de ejercicios analizados en el Capítulo 3.

De hecho, los libros del segundo ciclo de la ESO (Vizmanos, 2006-2008) presentan un apartado final de autoevaluación donde queda constatado el poco uso de los problemas ya que de las 58 actividades sólo 5 son problemas (8,62%). Igualmente, sólo hay 2 cuestiones (3,45%) que exigen comprender la actividad y que no están relacionadas con una técnica de cálculo directa.

Por otro lado, el número de cuestiones que figuran en los libros consultados resulta incluso menor que el de problemas. Por ello, apenas se adjuntan cuestiones en el capítulo 3 de actividades (ya que no resultan representativas de las actividades de los libros). Sin embargo, todas las cuestiones son del mismo estilo donde hay que responder si son ciertas o falsas ciertas afirmaciones o donde hay que construir una función que cumple determinadas condiciones dadas, como se ve en la Figura 1.

23 Dibuja una función que cumpla estas condiciones.

a) Que su dominio sea $\mathbf{R} - \{2\}$, y su recorrido, $\mathbf{R}$.

b) Que su dominio sea $(-\infty, 0]$.

c) Que su dominio sea $[-6, 6]$, y su recorrido, $[0, 12]$.

Figura 1. Cuestión libro 4º ESO Opción B (Vizmanos, 2008, pág.184)

En la Figura 2 se adjunta un problema correspondiente al nivel de Secundaria del libro de Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 1992, página 227) similar al problema de 3º ESO (Vizmanos, 2006, pág.234) adjunto en la Tabla 14.

Charles vio anuncios de dos compañías de teléfonos móviles. La compañía Keep-in-Touch ofrece servicios con una tarifa básica de 20 dólares al mes, más 10 centavos por cada minuto. La Chit-Chat no tiene tarifa mensual, pero cobra 45 centavos de dólar por cada minuto. Ambas compañías disponen de tecnología que les permite precisar el tiempo empleado; no redondean por arriba al minuto más próximo, como hacen muchos de sus competidores. Compárense las facturaciones de las dos compañías durante un mes.

Figura 2. Problema (NCTM, 1992, pág. 227)

Ambos problemas, pretenden comparar dos compañías telefónicas aunque de forma diferente. Por un lado, el enunciado de la Figura 2 queda más abierto, mientras que para la resolución del segundo (tabla 14) es suficiente con contestar un par de preguntas particulares.

El problema de la Figura 2, permite el trabajo del problema de manera diferente. Según los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 1992, 227-229) se podría proponer el cálculo de algunos valores y su representación gráfica. Asimismo, se podrían plantear preguntas según el nivel de la clase.

- ¿Por qué una gráfica pasa por el origen y la otra no?
- ¿Se podría dar una fórmula algebraica que del precio de la factura en función de los minutos consumidos?
- ¿Qué compañía es más barata si uso poco el teléfono? ¿Cuánto tendría que hablar para que saliera más barata la otra compañía?
- Si sólo puedo gastar 20 €, ¿qué compañía me da más minutos?
- Incluso, una vez respondido a todo esto, podrían plantearse cambios de enunciado, ¿qué pasa si la compañía cambia la cuota mensual a 12 € y el precio del minuto a 2 céntimos/minuto?

En otro contexto, en el campo de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), Rodríguez (2005) aporta una fundamentación teórica, basada en los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) (Fonseca, Casas, Bosch y Gascón, 2009), y datos experimentales para justificar el uso de la situación “compañías telefónicas” para la introducción y desarrollo de la noción “función a trozos”.

Apoyándose en la tesis según la cual los problemas se vuelven más motivadores si los datos son generados por los propios alumnos (NCTM, 1992), se podría pedir a los alumnos que trajeran una factura de móvil de su casa y comparar con los minutos consumidos qué compañía les sale más barata, e incluso comparar con la compañía real suya.

Además, la continuación de este problema es idónea para comparar en una misma situación distintas variables (NCTM, 1992). Por un lado, se podría comparar el número de minutos frente al coste por minuto y por otro, se podría comparar el número de minutos frente al coste total de la factura con lo que se tendrían distintas gráficas según las variables (resaltando la importancia de elegir bien las variables para el estudio).

Otro tipo de actividad que se ha visto que aparece frecuentemente como ejercicio en los libros de texto de Secundaria consiste en vincular la gráfica de una función con su expresión algebraica, pero siempre son funciones de la misma familia. ¿Por qué no realizar ejercicios dónde se mezclen funciones de todo tipo? (NCTM, 1992) De esta manera, se podrían comparar las propiedades de unas u otras familias también gráficamente. Por ejemplo, ¿una función lineal siempre tiene de recorrido todo los reales?, ¿y las cuadráticas?, ¿y una cúbica?, ¿y una potencia cuarta?, ¿qué diferencia hay entre potencia par e impar en una función polinómica? Además, este tipo de ejercicios se podría apoyar en programas de ordenador que dibujen las gráficas de tal manera que el estudio sea visual en un principio y luego se busque una explicación.

En resumen, con el gran avance que hay cada día de las tecnologías, parece que habría que darle un mayor peso a estas en la educación. Por otro lado, unas cuestiones abiertas que exigen una mayor interpretación permitirían al alumno trabajar mucho más sus capacidades.

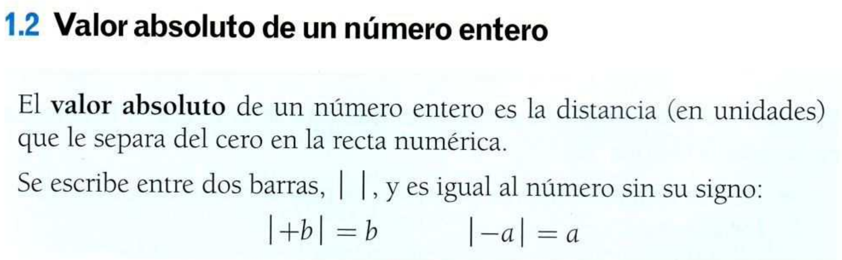
4.3 Correspondencia entre el currículo de mínimos y los libros de texto en Bachillerato

La cantidad de actividades en los libros analizados de los distintos itinerarios de Bachillerato difiere mucho. Así, mientras que en el Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnológico (Rey, 2008) se encuentran 532 actividades (263 en el primer curso; 269 en el segundo curso) en el de Ciencias Sociales (González, 2008) contiene 210 (154 y 56 respectivamente).

Analizando con mayor profundidad los libros, se comprueba que en 1º de Bachillerato de Ciencias de las Salud y Tecnológico (Rey, 2008) apenas un 10 % de las actividades (27 de 263) resultan ser problemas, mientras que en 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales (González, 2008) superan el 22 % (34 de 154 actividades).

Esta diferencia, se acentúa aun más en 2º Bachillerato posiblemente debido a la selectividad. En el currículo de Ciencias de la Salud y Tecnológico no aparece ningún criterio de evaluación de interpretación de problemas (Tabla 9), de tal manera que sólo aparece 1 problema en 269 actividades. En 2º Bachillerato de Ciencias Sociales, de las 56 actividades, 10 resultan problemas (17,85%).

En 4º ESO Opción B o Bachillerato se intercambia la definición aritmética de valor absoluto utilizada hasta ese momento (Figura 3) por una definición analítica como función definida a trozos.


1.2 Valor absoluto de un número entero

El **valor absoluto** de un número entero es la distancia (en unidades) que le separa del cero en la recta numérica.

Se escribe entre dos barras, $| \; |$, y es igual al número sin su signo:

$$|+b| = b \qquad |-a| = a$$

Figura 3. Definición valor absoluto libro 1º ESO (Álvarez, 2008, pág. 95)

Esta definición analítica no podría introducirse en años anteriores, debido a que la función definida a trozos aparece por primera vez en estos cursos. Sin embargo, estudios realizados sobre el valor absoluto (Wilhelmi M., Godino J.D. & Lacasta, E. 2007) avalan la mayor eficacia del valor absoluto como función a trozos ya que permite utilizarlo simbólicamente.

Otras definiciones equivalentes estudiadas por Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) y que evitan el modelo aritmético se encuentran adjuntas en la Figura 4.

$$|x| = \sqrt{x^2} \quad ; \quad |x| = \text{máx} \ \{x, -x\}$$

Figura 4. Definición alternativa de valor absoluto

Además, estas definiciones permitirían introducir, antes de llegar a Bachillerato, una definición analítica de valor absoluto (aunque sería necesario analizar cómo se ha introducido la raíz cuadrada en Secundaria).

Otra actividad hallada en el Libro de Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 1992) adecuada para aclarar el concepto de la función parte entera en Bachillerato, consistiría en comparar simultáneamente la función continua lineal y la función parte entera. Por ejemplo, se podría llevar al aula trabajando de forma parecida a la Secundaria con dos compañías de móvil, con lo que cobraría mucho más realismo la actividad. Además, se podría comparar una gráfica inicial de gasto por llamada (donde habrá poca diferencia) y finalmente, la acumulación de esa pequeña diferencia de precio con un gran número de llamadas.

Tras la introducción de todas las distintas formas de presentar funciones, los autores del Libro de Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 1992) sugieren realizar una actividad para analizar las distintas formas de presentar una función (algebraica, tabla de valores, gráfica o mediante un enunciado), comparándolas entre ellas y viendo las ventajas e inconvenientes de cada una:

Por ejemplo, una tabla de valores, sólo representa unos puntos y sin más información de la función puede resultar insuficiente para algunos análisis.

Por otro lado, la misma gráfica vista desde más cerca o más lejos puede parecer muy diferente y proporcionar informaciones diferentes como se ve en la Figura 5.

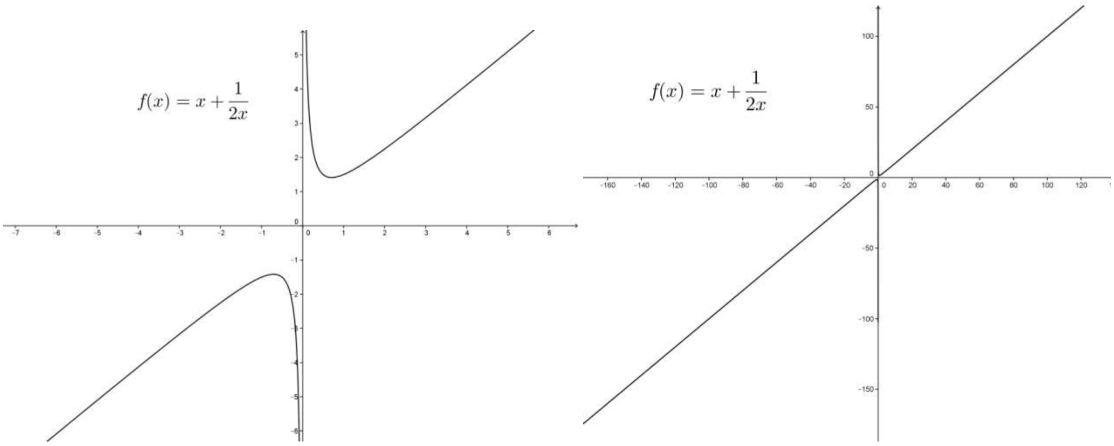


Figura 5: Vista gráfica de la misma función

De esta manera, los alumnos no se limitarían a extraer información de manera automática y tal vez, se volverían mucho más críticos con las actividades planteadas.

Además, posiblemente estas actividades les obliguen a reflexionar y comprender los conceptos en mayor profundidad mejorando su competencia matemática.

En resumen, al igual que ocurría en la Educación Obligatoria Secundaria serían convenientes actividades más abiertas, que exijan una mayor reflexión. Asimismo, algunos conceptos introducidos de forma diferente podrían generar un estudio muy interesante.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio sobre funciones y gráficas en 4º ESO Opción B

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de estudio sobre funciones y gráficas en 4º ESO Opción B.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En los dos primeros, se profundiza el estudio de las funciones y gráficas en el libro de texto de referencia; por un lado, detallando los contenidos de dicho libro y, por otro, deliberando sobre los posibles errores y dificultades previsibles en el aprendizaje del tópico. Un tercer capítulo, se dedica a explicar un proceso de estudio de funciones y gráficas programado para un grupo de 4º ESO Opción B, detallando, en el cuarto capítulo la experimentación en el aula de dicho proceso.

El objetivo aquí es valorar las repuestas del alumnado a partir de ciertos ejercicios y exámenes recogidos durante las prácticas.

Capítulo 5

Funciones y gráficas en el libro de texto de referencia de 4º ESO Opción B

En la parte I del trabajo, se ha analizado el currículo y las actividades referentes al tema de funciones y gráficas en los distintos niveles de la ESO y Bachillerato. Este estudio determina el *significado institucional de referencia* (Godino y Batanero, 1994; Godino y Font, 2007) de la experimentación que se realizará en el capítulo 8, pero es necesario primeramente analizar con detalle el contenido propio del aula de 4º ESO Opción B en el centro educativo concreto. Así, se presenta aquí un estudio más profundo de los aspectos de funciones y gráficas que se han llevado al aula.

5.1 Objetos matemáticos relacionados

Godino, Font y Wilhelmi (2006) utilizan una ontología para describir los objetos matemáticos involucrados en una lección: lenguaje, conceptos, procedimientos, situaciones, propiedades y argumentos. En esta sección analizamos según esta clasificación los contenidos del libro de texto de referencia (Vizmanos, 2008) en el proceso de estudio analizado en la experimentación.

A continuación, en sucesivas tablas se muestran los objetos matemáticos involucrados. En la Tabla 22, lenguaje, se distingue entre tres tipos de diferente naturaleza: verbal, gráfico y simbólico; en la Tabla 23, se comentan los contenidos matemáticos involucrados en el texto, en la Tabla 24, los procedimientos que se pretende que adquiera el alumnado y finalmente, en la Tabla 25, las distintas situaciones, problemas y actividades que se pueden encontrar a lo largo del texto.

Tabla 22. Objetos en el libro de 4º ESO (Vizmanos, 2008, págs. 172-205)

Lenguaje	
Verbal	• Función, variable dependiente e independiente, dominio e imagen • Tasa de variación (TV), crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos • Periodicidad • Acotación • Simetría par e impar • Operaciones de funciones: suma, diferencia, producto por una constante, producto de dos funciones, cociente de dos funciones, composición, función recíproca (o inversa) • Función definida a trozos • Límite, limite lateral • Continuidad, discontinuidad evitable e inevitable • Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas
Gráfico	Gráficas de funciones: • Crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos • Periodicidad • Acotación • Simetría par e impar • Función recíproca (o inversa) • Función a trozos • Continuidad y discontinuidad • Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas
Simbólico	• Expresiones algebraicas: f(x)= · • Números reales, intervalos de la recta real abiertos(a,b), cerrados [a,b], y semiabiertos (a,b],[a,b). • Función valor absoluto: | · | • Símbolos generales: ≤ ,≥ , ∞, etc.

Tabla 23. Conceptos en el libro de 4º ESO (Vizmanos, 2008, págs 172-205)

Conceptos	
Previos	Consideramos concepto previo todo lo introducido el año anterior, aunque posiblemente muchos de estos conceptos aun no estén perfectamente asimilados por el alumnado: • Función, variable dependiente e independiente, dominio e imagen • Tasa de variación, función creciente en un intervalo, función decreciente en un intervalo, máximo y mínimo relativo y absoluto en un punto • Función periódica • Función simétrica par e impar • Función continua y discontinua (solo gráficamente)
Emergentes	• Función acotada, función acotada superiormente y función acotada inferiormente. • Suma de funciones, producto de constante por función, producto de funciones, cociente de funciones, composición de funciones, función recíproca o inversa • Límite, limite lateral, indeterminaciones • Continuidad en términos algebraicos

Tabla 24. Procedimientos en el libro de 4º ESO (Vizmanos, 2008, págs. 172-205)

Procedimientos
• Cálculo de dominios y recorridos de funciones a partir de su expresión algebraica.
• Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de una función a la vista de su gráfica.
• Cálculo de la tasa de variación(TV) en intervalos dados.
• Determinar si una función está acotada y en caso afirmativo, de qué tipo y dar cotas adecuadas a la situación.
• Determinar si una función es periódica y en caso afirmativo calcular su periodo.
• Determinar si una función es simétrica algebraicamente.
• Calcular la suma, diferencia, producto, cociente y composición de funciones. Cálculo de la función recíproca.
• Dibujar una determinada función a trozos.
• Dada la gráfica de una función a trozos sencilla calcular su expresión algebraica.
• Cálculo de límites por tabla de valores
• Cálculo de límites con expresiones algebraicas sencillas.
• Estudio de la continuidad de una función. Determinar el tipo de discontinuidades en caso de ser discontinua.
• Cálculo de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.
• Resolución de problemas con ayuda de funciones.

Tabla 25. Situaciones en el libro de 4º ESO (Vizmanos, 2008, págs 172-205)

Situaciones
• Resolución de ejercicios descontextualizados donde hay que utilizar los procedimientos adecuados para calcular la solución
• Resolución de problemas contextualizados donde hay que hallar la relación funcional entre dos variables, para posteriormente, dibujar la gráfica o hallar determinadas propiedades de la función.
• Resolución de problemas donde hay que hallar determinados límites para poder responder a las preguntas.
• Cuestiones reflexivas de tipo verdadero-falso o construir funciones cumpliendo determinadas propiedades.

Tabla 26. Propiedades en el libro de 4º ESO (Vizmanos, 2008, págs 172-205)

Propiedades
• Dominio de funciones con radicales ($\Delta \geq 0$) y racionales (denominador$\neq$0).
• Límite de la suma, del producto, del cociente y de la composición de funciones f y g (existiendo sus correspondientes).
• Límite de una función f por una constante existiendo el límite de f.

La mayoría de las definiciones del libro, pueden clasificarse como definiciones-regla ya que, de la definición se deduce la técnica de cálculo que se pretende utilizar para resolver las actividades. Esto ocurre con la definición de función creciente/decreciente en un intervalo, máximos y mínimos, periodicidad, acotación, simetrías, operaciones de funciones, etc.

Por ejemplo, en la Figura 6 se muestra la definición-regla de función simétrica par e impar.

Una función f es **simétrica respecto del eje de ordenadas** cuando para todo x del dominio se verifica que $f(-x) = f(x)$.

Estas funciones también se llaman **funciones pares**.

Una función f es **simétrica respecto del origen** cuando para todo x del dominio se verifica que $f(-x) = -f(x)$.

Estas funciones también se llaman **funciones impares**.

Figura 6. Definiciones de simetría (Vizmanos, 2008, pág. 177)

5.2 Análisis global de la Unidad Didáctica

La experimentación realizada en el capítulo 8 corresponde a conceptos y procedimientos del libro (Vizamnos, 2008) contenidos en los capítulos 10: funciones y 11: límites, por lo que en este apartado se analizarán ambas secciones. Un primer apartado (5.2.1) analiza el capítulo 10 (Vizmanos, 2008, págs. 172-189) y un segundo (5.2.2) analiza el capítulo 11 (Vizmanos, 2008, págs. 190-205).

Siguiendo el esquema del análisis ontosemiótico utilizado por Godino, Font y Wilhelmi (2006) se adjunta en la Figura 7 un esquema global de los contenidos que se pueden encontrar en el libro de 4º ESO (Vizmanos, 2008, págs. 172-205).

El tema 10, trabaja la definición de función y las primeras propiedades (crecimiento, máximos y mínimos, acotación, periodicidad y simetría) para culminar con las operaciones de funciones.

Por último, el tema 11 desarrolla los límites, continuidad y asíntotas.

Todas las lecciones se estructuran de la misma forma: una primera página de entrada al tema, una parte de desarrollo de contenidos, un apartado de resolución de problemas reales, un esquema/resumen para organizar las ideas presentadas a lo largo del tema, las actividades finales y una última hoja que denomina “mural de matemáticas” con curiosidades y anécdotas respecto al tema correspondiente (matemáticas divulgativas).

También la presentación de los contenidos es más o menos fija. Primero, mediante un ejemplo, resalta aquellos contenidos que quiere introducir en la hoja y reflexiona sobre ellos. Después, introduce la definición del concepto. En algunos casos aparecen unos primeros ejercicios resueltos y, finalmente, añade un apartado de ejercicios.

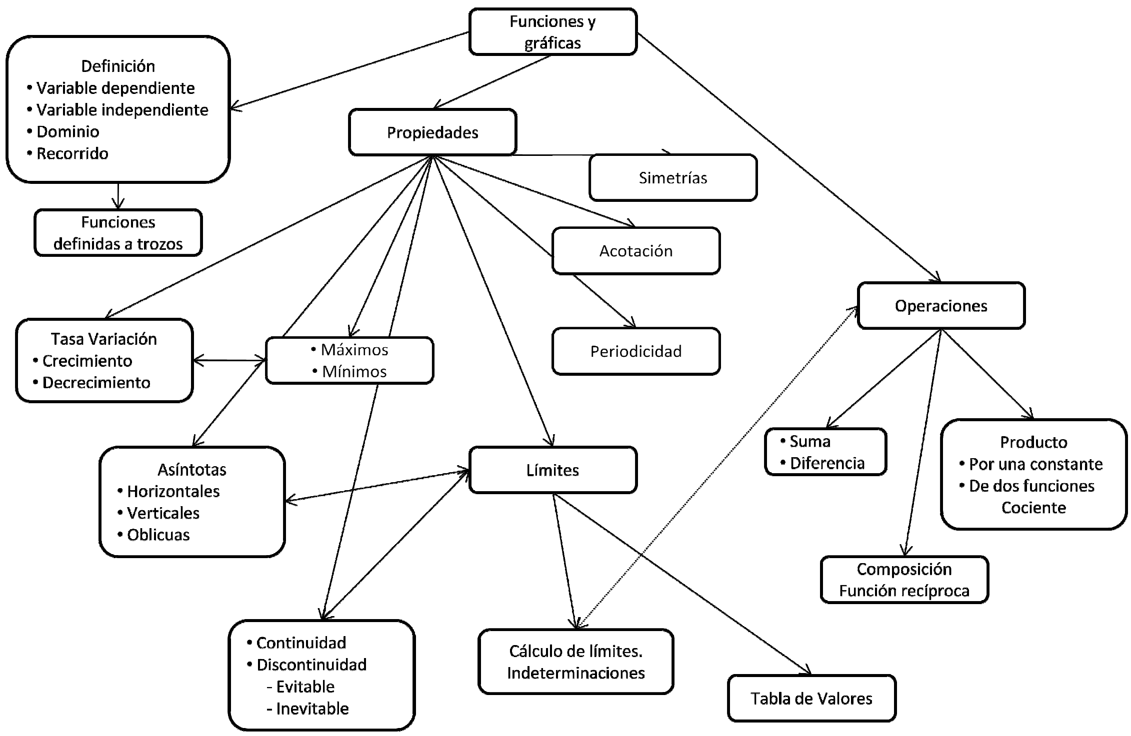


Figura 7. Esquema de contenidos del libro de referencia

Las actividades finales se encuentran, a su vez, agrupadas en distintos apartados. A los primeros ejercicios los denomina "*ejercicios para entrenarse*" y corresponden directamente con los distintos apartados de contenidos. Después, añade un apartado de *"cuestiones para aclararse"* (donde aparecen cuestiones más abiertas y que exigen reflexionar y haber comprendido la teoría). Continúa con una hoja de problemas. La penúltima página está dividida en dos secciones, una de refuerzo y la otra de ampliación. Finalmente, la última hoja contiene unos problemas para interpretar y resolver y una autoevaluación cuyas soluciones se encuentran al final del libro.

5.2.1 Análisis global de la unidad didáctica 10: funciones

Una vez explicada la distribución general de los temas, nos centramos ya en el tema 10 (Vizmanos, 2008, págs. 172-189).

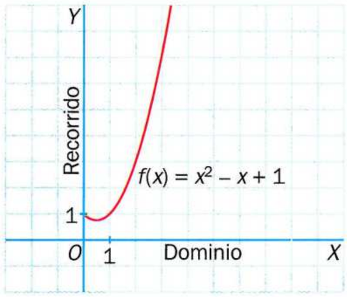
Este contiene 8 apartados de contenidos: concepto de función, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos absolutos y relativos, funciones periódicas y acotadas, funciones simétricas, operaciones con funciones, funciones recíprocas y funciones definidas a trozos.

Fijémonos primero en el concepto de función. Como se ha nombrado antes de la estructura de los contenidos, comienza dando un ejemplo de función y calculando su dominio y recorrido (Figura 8).

Ejemplo. *El coste anual, en miles de euros, del mantenimiento de una potabilizadora en función de los años que lleva operativa viene dado por la relación $f(x) = x^2 - x + 1$. Halla el dominio y el recorrido de esta función.*

Este es un ejemplo de **función**. La variable **independiente** x es el número de años, la variable **dependiente** y o $f(x)$ es el coste en miles de euros, el **dominio** de la función es el subconjunto de los números reales $[0, +\infty)$, y la **imagen** o **recorrido** es $[0{,}75, +\infty)$.

x	$f(x) = x^2 - x + 1$
0	1
1	1
2	3
3	7
4	13
...	...



Una función puede venir dada por un enunciado, por una fórmula (como $f(x) = x^2 - x + 1$), por una tabla o por una gráfica, como acabamos de ver.

Figura 8. Función, dominio y recorrido (Vizmanos, 2008, pág. 173)

El ejemplo, pretende introducir las nociones de función, variables, dominio y recorrido. Sin embargo, no explica el procedimiento utilizado para hallar estos últimos. La gráfica adjunta a la derecha de la Figura 8, podría dar una idea del recorrido pero no hay ninguna referencia explícita que explique cómo se determina exactamente el 0,75.

La introducción de las condiciones de los dominios de funciones racionales (denominador $\neq 0$) y radicales ($\Delta \geq 0$) se realiza mediante un ejemplar-tipo (Figura 9), donde una función particular pretende ser representativa de todas las de su familia, y, por lo tanto, se puede generalizar el proceso seguido en el ejercicio resuelto (ilusión de la transparencia).

EJERCICIO RESUELTO

1. Halla el dominio y el recorrido de cada una de estas funciones.

a) $f(x) = +\sqrt{x-2}$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$

a) Esta función solo tiene sentido cuando el radicando es positivo o nulo; es decir, $x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$. Por tanto, $D(f) = [2, +\infty)$. Las imágenes de esta función son solo números reales positivos, luego $Im(f) = [0, +\infty)$.

b) Esta función está definida para cualquier valor real excepto para los que anulan al denominador; es decir, $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$. Por tanto, $D(g) = \mathbf{R} - \{4\}$.

Las imágenes de esta función pueden ser cualquier número real excepto el 0, ya que una fracción solo puede ser 0 si el numerador se anula, lo que no es posible en este caso.

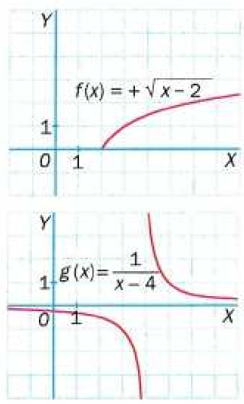


Figura 9. Ejemplos de recorridos (Vizmanos, 2008, pág. 173)

Además, a la derecha de la Figura 9, se encuentran las gráficas de las funciones que pueden servir de medio de control (para comprobar los resultados), que resultan innecesarias para la resolución algebraica que desarrolla el libro.

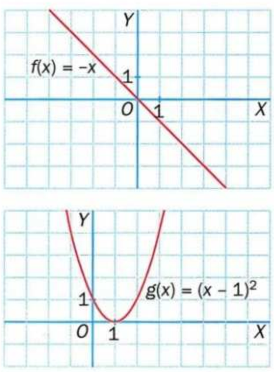
El segundo contenido introducido en la lección corresponde a la tasa de variación y crecimiento. Comienza como en la Figura 10.

Ejemplo. *¿Cómo varía la función* $f(x) = x^2 + 1$ *cuando la variable* x *pasa de 1 a 1,2; es decir, cuando su valor se incrementa en dos décimas?*

Figura 10. Ejemplo tasa de variación y crecimiento (Vizmanos, 2008, pág. 174)

Esta pregunta, podría llevar fácilmente al alumnado a generalizar erróneamente que al incrementar el valor de x en dos décimas, el valor de la función varía en 44 centésimas (independientemente del intervalo, es decir, no sólo para el intervalo [1; 1,2], haciendo entonces una interpretación "lineal" de la función parabólica). También la pregunta queda un poco ambigua ya que habla de "su valor" refiriéndose a la variable x que ha nombrado anteriormente, pero se podría malinterpretar y pensar que está hablando del valor de la función.

Los comentarios del ejercicio resuelto (Figura 11) se desvían del propósito inicial. Como pide estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, hay que hallar su tasa de variación en todo el intervalo. Sin embargo, parece dar por supuesto que los alumnos saben que la tasa de variación en una recta es constante. Igualmente, nombra que la tasa de variación es de signo constante en una función cuadrática si no contiene al vértice. Ambos resultados, parecen apoyarse en las gráficas de la Figura 11, pero como lo que el ejercicio pide es estudiar el crecimiento y decrecimiento, los estudiantes podrían deducir de la propia gráfica la misma información sin utilizar la tasa de variación.



EJERCICIO RESUELTO

2. Calcula la tasa de variación y estudia el crecimiento o decrecimiento de las siguientes funciones en el intervalo [2; 2,1].

a) $f(x) = -x$ b) $g(x) = (x-1)^2$

a) $TV[2;\,2{,}1] = f(2{,}1) - f(2) = -2{,}1 + 2 = -0{,}1 < 0$. Como se trata de una recta, la tasa de variación será negativa para cualquier par de valores dentro del intervalo. Por tanto, la función es decreciente en [2; 2,1].

b) $TV[2;\,2{,}1] = g(2{,}1) - g(2) = (2{,}1-1)^2 - (2-1)^2 = 1{,}21 - 1 = 0{,}21 > 0$
Al ser la función cuadrática, su gráfica es una parábola y la tasa de variación en un intervalo es de signo constante, excepto si contiene al vértice de la parábola. Como el vértice está en $x = 1$, no está incluido en [2; 2,1], por lo que la tasa de variación es positiva para cualquier par de valores en dicho intervalo y la función es creciente en él.

Figura 11. Ejercicio resuelto libro (Vizmanos, 2008, pág. 174)

A continuación, el libro introduce los conceptos de máximo y mínimo, utilizando siempre funciones acotadas, lo que podría llevar a pensar al alumnado que las funciones siempre tienen máximos y mínimos absolutos.

La periodicidad se explica con un ejemplo real y cercano mediante el minutero de un reloj lo que puede resultar muy motivador al alumnado.

Además de trabajar el procedimiento algebraico de cálculo de simetrías, el libro añade las gráficas de funciones de la Figura 12 que permiten deducir el tipo de simetría de una función dada su gráfica. Además, si se mira en la Figura 12 la relación entre A y A’ puede entenderse porque se llaman simetrías respecto del eje de ordenadas o respecto del origen.

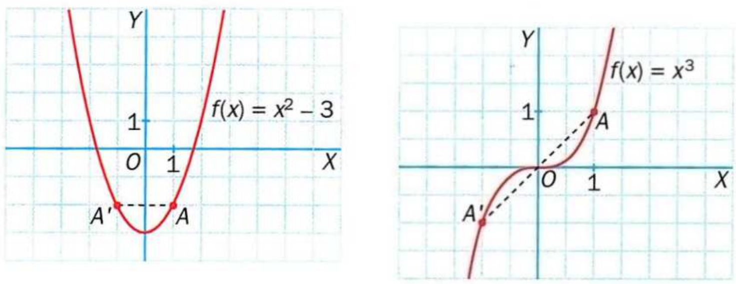
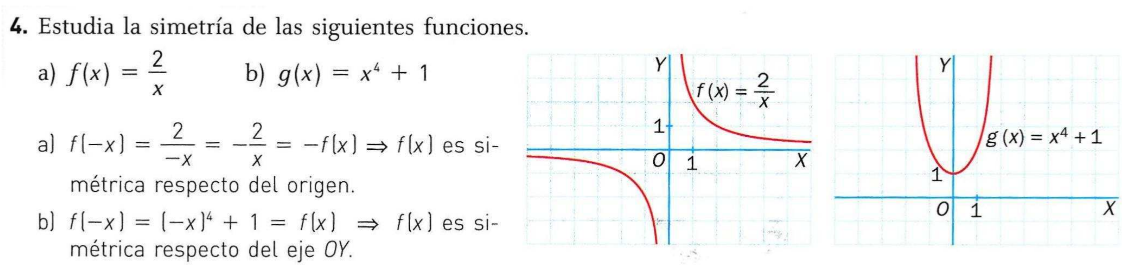


Figura 12. Funciones simétricas (Vizmanos, 2008, pág. 177)

Ambos métodos de estudio de las simetrías: algebraica y gráficamente, quedan reforzados en el ejercicio final resuelto (Figura 13), ya que se resuelve algebraicamente, pero se añaden sus gráficas como medio de control.



4. Estudia la simetría de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $g(x) = x^4 + 1$

a) $f(-x) = \frac{2}{-x} = -\frac{2}{x} = -f(x) \Rightarrow f(x)$ es simétrica respecto del origen.

b) $f(-x) = (-x)^4 + 1 = f(x) \Rightarrow f(x)$ es simétrica respecto del eje OY.

Figura 13. Ejercicio resuelto de simetrías (Vizmanos, 2008, pág. 177)

El siguiente apartado, que trabaja las operaciones con funciones comienza como se ve en la Figura 14.

Ejemplo. *En una práctica de Biología y Geología han encontrado que el número de gusanos de seda que ha criado cada grupo de trabajo sigue esta función.*

$$f(x) = x^2 + 1$$

Donde x *es el número de semanas.*

Si en la clase hay 5 grupos, el número de gusanos que hay en total al final de cada semana será el que aparece en la tercera columna de la tabla.

x	$f(x)$	$g(x)$
…	…	…
0	1	5
1	2	10
2	5	25
3	10	50
4	17	85
5	26	130
…	…	…

Estos valores corresponden a la función $g = 5 \cdot f$, que asocia directamente los valores de la tercera columna con los de la primera.

Figura 14. Operaciones funciones libro (Vizmanos, 2008, pág. 178)

La explicación introduce el concepto contextualizado en una situación cercana al alumnado. Sin embargo, a partir de aquí, el resto de las operaciones aparecen descontextualizadas. Por otra parte, las operaciones de funciones no aparecen en el currículo del curso; es un contenido que los autores del libro han decidido adelantar. Sin embargo, se introducen prácticamente como meras enumeraciones, sin estudiarlas realmente ya que no se ve ninguna propiedad ni se proponen cuestiones que motive un trabajo sobre sus implicaciones. Por ejemplo, ¿qué ocurre cuando multiplicamos una función por una constante menor que 1?, ¿y por una constante mayor que 1?, ¿por qué quedan fuera del dominio los puntos que anulan el denominador? Estas y otras muchas cuestiones quedan sin respuesta, a pesar de que se dispone de los medios.

Finalmente, en la teoría de composición de funciones no aparece ningún comentario sobre la no conmutatividad de la composición de funciones, dejando esta propiedad como pregunta para el ejercicio final o como tarea para el docente del aula.

Además, este comentario podría volverse aún más importante en el siguiente apartado en el que aparecen las funciones recíprocas (o inversas) que sí son conmutativas.

En el libro se introduce (Figura 15) la definición de función inversa algebraicamente.

Se observa que las dos funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ asignan a cada valor x el mismo número x. La función que cumple esta propiedad se denomina **función identidad**, $i(x)$.

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x \Rightarrow f \circ g = g \circ f = i$$

Como al componer las funciones f y g obtenemos la función identidad, se dice que son funciones **recíprocas** o **inversas**.

Figura 15. Composición funciones libro (Vizmanos, 2008, pág. 180)

Sin embargo, enseguida se habla de la interpretación gráfica de estas funciones como se puede ver en la Figura 16.

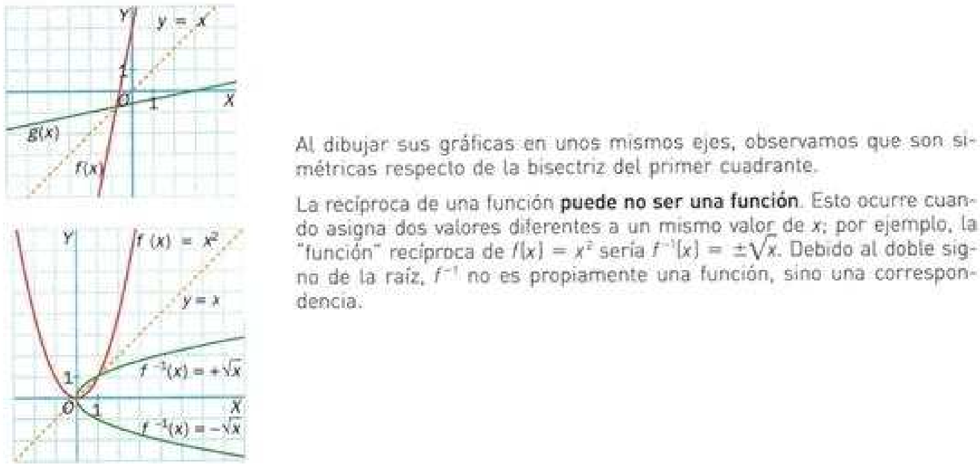


Figura 16. Función inversa libro (Vizmanos, 2008, pág. 180)

Además, la notación de puede llevar a una gran confusión con — y esta aclaración se deja como un mero comentario en el margen del libro sin ningún tipo de ejemplo o comentario posterior.

El último apartado de contenidos explica las funciones definidas a trozos. Se introducen, mediante un problema contextualizado (Figura 17) cuya función viene partida en tres trozos. Lo ventajoso de ella, es que en uno de los puntos donde cambia de expresión la función es continua y en el otro discontinua.

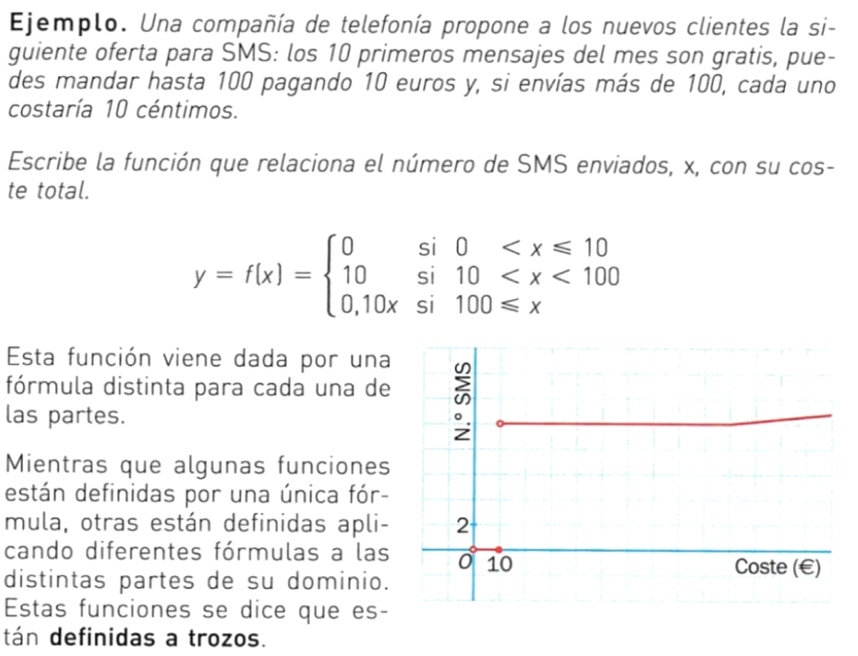


Figura 17. Función a trozos libro (Vizmanos, 2008, pág. 181)

Sin embargo, en el libro no se explica la diferencia entre un punto relleno y otro vacío. Además, esto se vuelve un concepto importante, pues con dos puntos relleno en la misma abscisa no se trataría de una función.

Igual que ocurría con las operaciones de funciones, el libro no contiene ninguna reflexión sobre las muchas implicaciones e ideas involucradas con esta nueva forma de definir las funciones.

Tras los contenidos, se presenta una aplicación del tema estudiado. En este caso, se trata de un sencillo problema de distancias con expresiones funcionales muy sencillas que permite resolver gráficamente un sistema de ecuaciones que podría llegar a resultar complicado para los estudiantes de esta edad.

Finalmente, antes de comenzar con las actividades el libro añade un esquema de lo estudiado en toda la lección. En ella aparecen todos los conceptos estudiados salvo las funciones definidas a trozos.

En la parte I de este mismo trabajo, se ha nombrado la escasez de problemas y cuestiones en comparación con el número de ejercicios. Veamos exactamente en qué proporción se encuentran en nuestro tema en cuestión (Tabla 27).

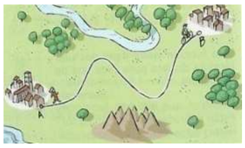
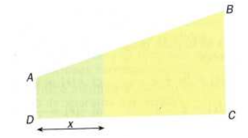
Tabla 27. Distribución actividades tema 10 (Vizmanos, 2008)

Tema 10	**Número**	**Porcentaje**
Ejercicios	60	68,2 %
Problemas	12	13,6 %
Cuestiones	16	18,2 %
Total	**88**	

Nos gustaría hacer un breve comentario sobre las imágenes del libro. Para ello, añadimos en la Tabla 28 todas las imágenes que no corresponden a gráficas de funciones.

Principalmente, las imágenes están relacionadas con algunos de los problemas presentados en la lección. Sin embargo, 3 de 8 no añaden ninguna información y se vuelven meros objetos decorativos del libro. Incluso algunas imágenes, como la 3 o la 5, pueden aumentar la dificultad del problema o desorientar al alumnado.

Tabla 28. Imágenes del tema 10 (Vizmanos, 2008, págs. 172-189)

 **Imagen 1**	 **Imagen 2**	 **Imagen 3**	 **Imagen 4**
 **Imagen 5**	 **Imagen 6**	 **Imagen 7**	 **Imagen 8**

- **Imagen 1**: Está asociada a un problema contextualizado en la clase sobre gusanos de seda. Sin embargo, el dibujo es innecesario ya que no añade ninguna información extra.
- **Imagen 2**: Este dibujo introduce de una imagen visual de la metáfora de función como máquina (entra un valor y sale otro). Asimismo, ayuda a la comprensión de la composición de funciones como aplicar primero una función y después la otra.
- **Imagen 3**: La imagen busca un ejemplo "real" de función a trozos vista gráficamente. Sin embargo, no parece que aclare mucho la situación.
- **Imagen 4**: Asociado a un problema ayuda a la correcta comprensión del enunciado del mismo
- **Imagen 5**: Aparecen un esbozo de las dos gráficas de las funciones del problema. Podrían ser un buen apoyo para el alumnado, pero el hecho de que estén como dos gráficas diferentes, puede llevar al alumnado a dibujarlas también por separado, lo que complica la comparación de ambas.
- **Imagen 6**: Asociado a un problema no añade ninguna información.
- **Imagen 7**: Asociado a un problema, no añade ninguna información.
- **Imagen 8**: Asociado a un problema. En vez de enunciar la situación, explica cómo se comporta mediante un dibujo.

En el "mural de las matemáticas" de este tema aparece un contenido que titula "amor matemático"(Figura 18) que resulta un poco extravagante si se tiene en cuenta la crítica edad del alumnado.

Figura 18. Mural de las matemáticas, libro (Vizmanos, 2008, pág. 189)

5.2.2. Análisis global de la Unidad Didáctica 11: Límites de funciones. Continuidad

Este nuevo tema contiene 6 apartados de contenidos: tendencia de una función, concepto de límite de una función, propiedades de los límites y expresiones indeterminadas, cálculo de límites, continuidad y discontinuidad.

Añadimos un último contenido, asíntotas, que en el libro se encuentra en la lección siguiente, pero que consideraremos como de esta lección por ser el único concepto del tema 12 del libro (Vizmanos, 2008, págs. 210-211) introducido en el aula durante las prácticas.

El primer contenido, pretende dar una idea intuitiva del nuevo concepto que se va a introducir: los límites. Además, se aprovecha de los límites para concienciar al alumnado sobre qué pasará en el futuro en algunas situaciones reales preocupantes. Así, introduce tanto el declive del lagarto gigante en España como la comparación de tasas de mortalidad infantil entre Sudán y España.

Centrándonos ya en los contenidos matemáticos, la primera página intenta calcular los primeros límites mediante una tabla de valores que cada vez se acerque más al valor pedido. Así, compara como varía el valor de la función cuando x se acerca cada vez más al punto.

El valor de la función en un punto *x*, no influye en el valor del límite en ese punto. Sin embargo, los autores del libro lo introducen en la tabla de valores (Figura 19).

a) Formamos la siguiente tabla de valores.

x tiende a 1 por la izquierda: $x \to 1^-$ $\qquad$ $1^+ \leftarrow x$: x tiende a 1 por la derecha

x	...	0,99	0,999	0,9999	...	1	...	1,0001	1,001	1,01	...
$f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$	...	−0,985	−0,998	−0,999	...	−1	...	−1,000	−1,001	−1,015	...

$f(x)$ tiende a -1

Por tanto, cuando x se acerca a 1, se verifica que $f(x)$ tiende a -1.

Figura 19. Límite en 1, libro (Vizmanos, 2008, pág. 191)

De hecho, llega a resultar una falta de absoluto rigor matemático cuando introduce el infinito en esas tablas (Figura 20).

c) Formamos la siguiente tabla de valores.

$-\infty \leftarrow x$: x tiende a $-\infty$ — x tiende a $+\infty$: $x \to +\infty$

x	$-\infty$	...	$-100\,000$	...	-1000	...	0	...	1000	...	100 000	...	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$	2	...	1,99994	...	1,994	...	0	...	2,006	...	2,00006	...	2

$f(x)$ tiende a 2 — $f(x)$ tiende a 2

Cuando x tiende a $-\infty$, se observa que $f(x)$ se acerca a 2.

Cuando x se aproxima a $+\infty$, se observa que $f(x)$ tiende a 2.

Figura 20. Comportamiento asintótico, libro (Vizmanos, 2008, pág. 191)

Dejando aparte la tabla de valores, los puntos escogidos de la función son: un punto del dominio (x=1) donde existe límite, otro que queda fuera del dominio (x=3) y el comportamiento asintótico de la función. Además, el límite en 3 va a crear la necesidad de definir los límites laterales puesto que por la izquierda o por la derecha del 3 salen de signos opuestos (Figura 21).

x tiende a 3 por la izquierda: $x \to 3^-$ — $3^+ \leftarrow x$: x tiende a 3 por la derecha

x	...	2,99	2,999	2,9999	...	3	...	3,00001	3,0001	3,001	...
$f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$	...	-598	-5998	$-59\,998$	...	No está definido	...	600 002	60 002	6002	...

$f(x)$ tiende a $-\infty$ — $f(x)$ tiende a $+\infty$

Figura 21. Límite en 3, libro (Vizmanos, 2008, pág. 191)

En el siguiente apartado, aprovechando los límites se introduce la notación de límites y una definición un poco más rigurosa. Sin embargo, intenta dar una definición que englobe tanto al límite global como al límite lateral con lo que se presentan de forma inconexa. ¿Qué relación hay entre los límites laterales en x=a y el límite en ese mismo punto?, ¿cuándo es necesario hallar los límites laterales y cuándo no?, ¿qué ocurre si me pide un límite en x=a y salen distintos límites laterales para ese punto?, ¿cuándo se dice que existe límite en x=a? Estas y otras muchas cuestiones quedan sin respuesta, cuando se dispone de los medios.

La definición de la Figura 22 nombra, "*x* se acerca a x_0", pero, ¿qué quiere decir el libro con ello? Para responder a esta pregunta, el libro obliga a ir al margen donde explica que "*x puede tomar cualquier valor tan próximo a* x_0 *como se desee, sin llegar a tomar el valor* x_0". En ese mismo margen, adjunto en la Figura 23, se explica, que para el límite en *x=a* el valor de *f(a)* no interviene lo que contradice el hecho de introducirlo en la tabla de valores.

Una función $f(x)$ tiene por **límite** en el punto x_0 el valor L si, a medida que x se acerca a x_0, se verifica que sus transformados, $f(x)$, se aproximan a L tanto como queramos. Lo expresamos así:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

El valor x_0 puede ser a, $-\infty$, $+\infty$, a^- y a^+; en estos dos últimos casos, el límite se llama **límite lateral**. El valor L puede ser cualquier número real, o bien $+\infty$ o $-\infty$.

Figura 22. Definición límite, libro (Vizmanos, 2008, pág. 192)

TEN EN CUENTA

Si una función tiene límite L cuando x tiende a x_0 $(x \to x_0)$, quiere decir que x puede tomar cualquier valor tan próximo a x_0 como se desee, sin llegar a tomar el valor x_0. En dicho punto, la función no tiene por qué valer L; puede tomar cualquier otro valor o no estar definida.

Por ejemplo, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ y, en cambio, la función no está definida en $x = 0$.

En la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, mientras que en el punto 2, la función vale 0.

Figura 23. Margen límites, libro (Vizmanos, 2008, pág. 192)

Además, sólo en el ejemplo aparece lo que significa a^- y a^+ (como aproximarse por la izquierda y derecha respectivamente), sin explicar realmente que significa la izquierda o la derecha del número. Igualmente, podría ser adecuado introducir un valor de *a* negativo para evitar una asociación inadecuada de izquierda y derecha de *a*.

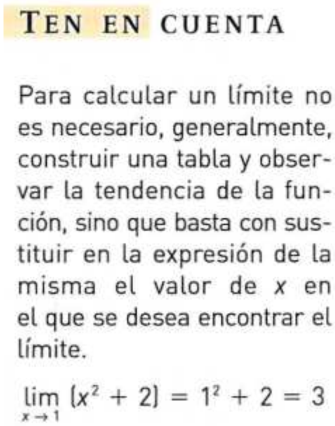
No es hasta el siguiente apartado del libro (Figura 24) donde se presentan algunas respuestas a las preguntas que hemos formulado anteriormente sobre límites y límites laterales.

Los límites de funciones presentan propiedades análogas a los límites de sucesiones numéricas.

- Si una función tiene límite en un punto, este es único. Una función no puede tener dos límites diferentes en el mismo punto.
- Si una función presenta límites laterales distintos en un punto, entonces no tiene límite en ese punto.
- Si las funciones f y g tienen límite en $x = x_0$ y c es un número real cualquiera, se verifican las siguientes propiedades.

Figura 24. Propiedades límites, libro (Vizmanos, 2008, pág. 193)

El cálculo del límite de una función continua en un punto de su dominio, *a*, se reduce a calcular la imagen de dicho punto, *f(a)*. Esta idea, aparece en el libro en el margen de la página de propiedades (Figura 25). Sin embargo, en ningún momento se nombra que se esté trabajando únicamente con funciones continuas, por lo que el comentario resulta confuso tras el estudio de límites introducido hasta ese momento. Incluso, si se comparan las Figuras 23 y 25, ambos comentarios resultan completamente contradictorios.



TEN EN CUENTA

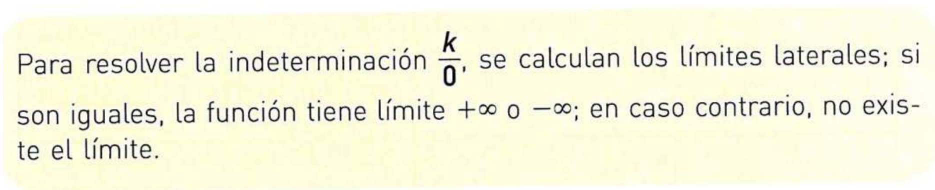
Para calcular un límite no es necesario, generalmente, construir una tabla y observar la tendencia de la función, sino que basta con sustituir en la expresión de la misma el valor de x en el que se desea encontrar el límite.

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 2) = 1^2 + 2 = 3$$

Figura 25. Margen indeterminaciones, libro (Vizmanos, 2008, pág. 193)

El libro prosigue el estudio con las indeterminaciones y cálculo de algunos límites en los casos de indeterminaciones más sencillas.

Así, se explica cómo resolver de forma general los límites de funciones racionales con indeterminaciones $\frac{k}{0}, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ (Figura 26).



Para resolver la indeterminación $\frac{k}{0}$, se calculan los límites laterales; si son iguales, la función tiene límite $+\infty$ o $-\infty$; en caso contrario, no existe el límite.

Figura 26. Cálculo límite, libro (Vizmanos, 2008, pág. 194)

En la Figura 26, se ha adjuntado el procedimiento de cálculo de límites de indeterminaciones $\frac{k}{0}$, porque el libro aclara que si la función tiene ambos límites laterales del mismo signo, se dice que tiene límite. Vuelve a considerar (igual que en la Figura 20) que el infinito es un punto. Sin embargo, se vuelve una transposición didáctica innecesaria que podría culminar en una mayor dificultad en cursos superiores.

Para el cálculo de límites ∞-∞ se utiliza un ejemplo particular con dos funciones racionales con la idea de generalizar el proceso. Vuelve a crearse una ilusión de la transparencia donde el ejemplo pretende ser representativo de las posibles situaciones pero que no siempre se generaliza.

Finalmente, realiza un ejemplo de una función con indeterminación 1^{∞} por aproximación al número e. (Figura 27) Este proceso, se resume en el recuadro amarillo pero añade también una regla de cálculo general.

La indeterminación del tipo $\mathbf{1^{\infty}}$ se resuelve transformando la expresión de partida en una expresión asociada al **número *e***. Por ejemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{x+3} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3+2}{x+3}\right)^{x+3} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x+3}\right)^{x+3} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+3}{2}}\right)^{\frac{x+3}{2}}\right]^2 = e^2$$

Para resolver la indeterminación $\mathbf{1^{\infty}}$, se transforma la función hasta obtener una expresión asociada al número *e*.
También puede aplicarse esta regla:
Si $\lim_{x \to +\infty} B(x) = 1$ y $\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} B(x)^{\alpha(x)} = e^{\lim_{x \to +\infty} \alpha(x)\,[B(x) - 1]}$

Figura 27. Límites 1^{∞}, libro (Vizmanos, 2008, pág. 195)

El siguiente apartado de contenidos explica la continuidad de funciones aprovechándose del estudio de la continuidad gráfica realizado el año anterior (Figura 28).

Observa las siguientes funciones dadas por sus gráficas.

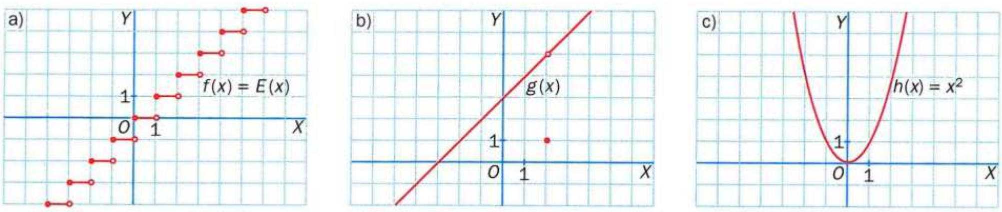
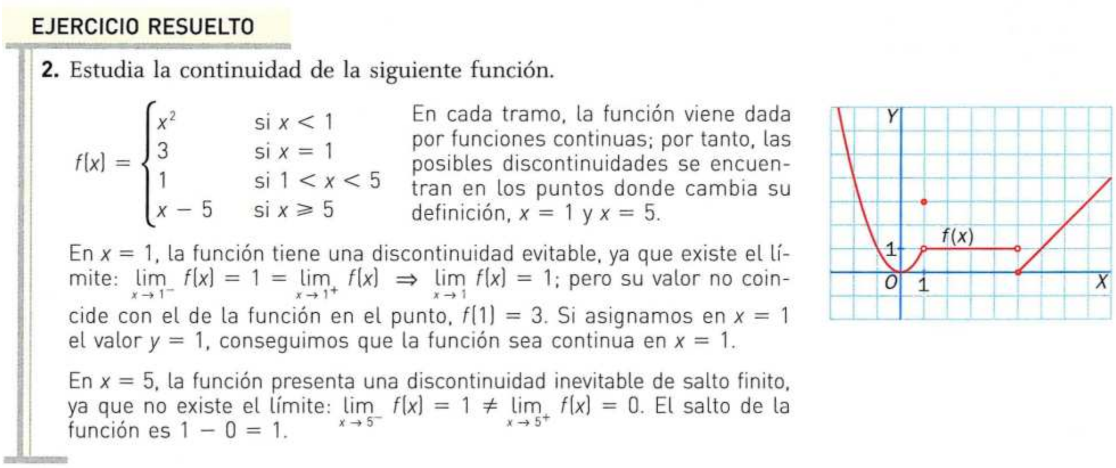


Figura 28. Continuidad, libro (Vizmanos, 2008, pág. 194)

A la vista de varias gráficas de funciones continuas y discontinuas en determinados puntos, se realiza un estudio para ver qué es lo que le ocurre a la función en términos analíticos. Así, se deduce la definición de continuidad en un punto a partir de estos ejemplos y de lo que el alumnado ya conoce.

El último apartado del tema del libro lo dedica a la clasificación de discontinuidades. Este lo realiza igual que en la continuidad analizando ciertas gráficas.

En el ejercicio resuelto sobre continuidad de la Figura 29 se vuelve a añadir la representación gráfica de funciones. Igual que ocurría antes, esta resulta un buen medio de control, pero como el alumnado sabe resolver el ejercicio gráficamente desde cursos anteriores es posible que realice el ejercicio a la vista de la gráfica, sin practicar los nuevos procedimientos explicados durante este curso.



EJERCICIO RESUELTO

2. Estudia la continuidad de la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

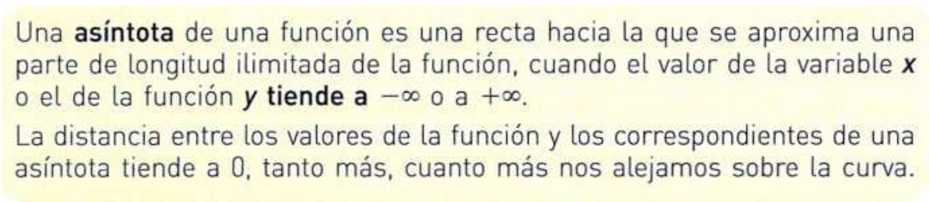
En cada tramo, la función viene dada por funciones continuas; por tanto, las posibles discontinuidades se encuentran en los puntos donde cambia su definición, $x = 1$ y $x = 5$.

En $x = 1$, la función tiene una discontinuidad evitable, ya que existe el límite: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1$; pero su valor no coincide con el de la función en el punto, $f(1) = 3$. Si asignamos en $x = 1$ el valor $y = 1$, conseguimos que la función sea continua en $x = 1$.

En $x = 5$, la función presenta una discontinuidad inevitable de salto finito, ya que no existe el límite: $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to 5^+} f(x) = 0$. El salto de la función es $1 - 0 = 1$.

Figura 29. Ejercicio continuidad libro (Vizmanos, 2008, pág. 195)

Las asíntotas aparecen en el libro en otro tema porque sólo se estudian para funciones racionales. Estas se introducen con la definición de la Figura 30.



Una **asíntota** de una función es una recta hacia la que se aproxima una parte de longitud ilimitada de la función, cuando el valor de la variable ***x*** o el de la función ***y* tiende a** $-\infty$ o a $+\infty$.

La distancia entre los valores de la función y los correspondientes de una asíntota tiende a 0, tanto más, cuanto más nos alejamos sobre la curva.

Figura 30. Asíntota, libro (Vizmanos, 2008, págs. 210-211)

Esta definición evita la propiedad en acto más extendida en el lenguaje común: *“recta a la que se acerca mucho la función sin llegar nunca a tocarla”*. Esta propiedad en acto sería eficaz en el universo de funciones racionales del libro de texto, pero no consideraría asíntotas en funciones como la de la Figura 31.

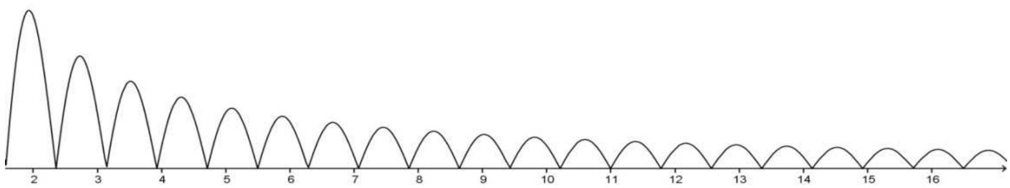


Figura 31. Gráfica con asíntota horizontal que llega a tocarla en infinitos puntos

La idea de *"parte ilimitada de la función"* puede resultar compleja desde el punto de vista del alumnado. Además, no se utiliza ningún tipo de mecanismo para indicar, en las gráficas de las funciones, que la función continua.

En el apartado de resolución de problemas reales se presenta el estudio de una función (Figura 32) dada por la ecuación logística. La resolución se realiza a través una tabla de valores debido a su complicada fórmula algebraica que no permite un manejo analítico. Además, en los ejercicios de la misma hoja se pide interpretar también las diferencias con el problema al introducir pequeño cambios (Figura 33).

Cuando debamos usar funciones difíciles de representar, podemos tratar de construir una tabla de valores y sacar conclusiones a partir de ella.

Problema

Para repoblar un estanque, el departamento de Parques y Jardines ha introducido cinco parejas de carpas. El estanque dispone de unos recursos limitados (caudal de agua, alimento...), de modo que la población de carpas no podrá superar cierto límite. El número de ejemplares en función del tiempo se puede estimar usando esta fórmula.

$N(t) = \frac{150}{1 + 14 \cdot 1{,}05^{-t}}$, donde t es el tiempo en meses.

- ¿Cuántos peces habrá al cabo de un año? ¿Y después de dos?
- ¿Cuál es el número máximo de ejemplares que pueden vivir en el estanque?

Figura 32. Problema libro (Vizmanos, 2008, pág. 198)

15 ¿Crees que soltando inicialmente el doble de peces se llenaría el estanque en la mitad de tiempo? Estudia la función correspondiente:

$$N(t) = \frac{150}{1 + 6{,}5 \cdot 1{,}05^{-t}}$$

16 ¿Qué ocurriría si soltáramos los 10 peces en un estanque con una capacidad máxima de 300? Analiza la función correspondiente:

$$N(t) = \frac{300}{1 + 29 \cdot 1{,}05^{-t}}$$

Figura 33. Ejercicios libro (Vizmanos, 2008, pág. 198)

También se va a repetir el estudio del porcentaje de ejercicios, problemas y cuestiones en las actividades del tema (Tabla 29).

Tabla 29. Distribución actividades tema 11 (Vizmanos, 2008, pág. 190-205)

Tema 11	**Número**	**Porcentaje**
Ejercicios	53	75,7 %
Problemas	11	15,7 %
Cuestiones	6	8,6%
Total	70	

En la sección anterior se ha realizado un estudio de las imágenes del tema 10 del libro (Vizmanos, 2008). Repetimos en la Tabla 30 ese estudio con las imágenes del tema 11.

En este caso, aparecen dos fotos de autores cuyas aportaciones al estudio de límites y la continuidad resultaron importantes y 3 imágenes asociadas a problemas que no ayudan a la comprensión del mismo. La última imagen, aunque no aporta información relevante al problema, sería algo más adecuada ya que es probable que no se conozca qué es el bivalvo y la imagen ayuda a hacerse una idea.

Tabla 30. Imágenes del tema 11 del libro (Vizmanos, 2008, págs. 190-205)

 **Imagen 1**	 **Imagen 2**	 **Imagen 3**	 **Imagen 4**
 **Imagen 5**		 **Imagen 6**	

- **Imagen 1**: Retrato de Jean Le Rond d'Alembert.
- **Imagen 2**: Foto de Richard Feynman.
- **Imagen 3**: Asociado a un problema no añade ninguna información.
- **Imagen 4**: Asociado a un problema no añade ninguna información.
- **Imagen 5**: Asociado a un problema no añade ninguna información.
- **Imagen 6**: Asociado a un problema de poblaciones de bivalvos, añade una imagen de un bivalvo.

En todas las funciones de ambos temas que aparecen como ejemplo en el libro se presupone dominio máximo, por lo que se identifican las funciones con su fórmula algebraica. Sin embargo, esta identificación podría ser fuente de errores en otros cursos o situaciones.

En resumen, a pesar del gran esfuerzo que se hace al redactar los libros, en ellos se pueden encontrar tanto conceptos explicados adecuadamente como otros que pueden crear confusión. Además, dependiendo del grupo de alumnos, la respuesta ante una misma explicación es diferente. Así, es tarea del profesor, decidir qué conceptos va a seguir literalmente del libro y buscar nuevas vías más adecuadas para otros.

Capítulo 6

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

La intención de este capítulo es realizar un estudio *a priori* de las posibles dificultades y errores en el aprendizaje de las funciones y gráficas en 4º ESO Opción B.

Los comportamientos observados podrán entonces ser clasificados en dos grandes grupos: esperados o previsibles y contingentes, es decir, específicos del proceso concreto observado.

6.1 Dificultades previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

Este primer apartado del capítulo, pretende señalar posibles dificultades del alumnado, destacando los contenidos de este curso que el docente podría hacer surgir en el aula como una necesidad y no como meras técnicas de cálculo.

Por ejemplo, en 3º ESO se realiza un estudio bastante profundo de las gráficas de funciones. Así, el alumnado que llega a este curso, conoce ya casi todas las propiedades de funciones que se estudian en el libro: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, simetrías, periodicidad, etc. Sin embargo, si la función no viene dada gráficamente, o es muy sencilla (de tal manera que puedan representarla), no tienen recursos suficientes para estudiar sus propiedades. ¿Cómo pueden estudiar las funciones polinómicas de grado 3, por ejemplo, $f(x)=x^3-14x^2-9x+8$? ¿Y una función racional, como $f(x)=\frac{1}{x-2}$?

El límite es un concepto muy complejo y que creará muchas dificultades en el aula. Sin embargo, como el dominio de las funciones ya se ha estudiado, mediante una función de dominio no acotado, el profesor podrá introducir el estudio de los límites en el infinito, logrando ver su utilidad desde el inicio de la institucionalización. Así, podría plantear al alumnado preguntas del estilo ¿cómo se puede controlar el comportamiento de la función cuyo dominio no está acotado?, ¿es necesario conocer el valor de cada punto del dominio? (¿es posible conocer el valor en cada punto del dominio?).

Análogamente, estudiando el dominio de una función racional como $f(x)=\frac{1}{x-3}$ cuyo dominio es $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, el docente puede hacer surgir la necesidad de límite lateral .

6.2. Errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica y su posible origen

En esta segunda sección del capítulo se pretenden destacar algunos de los errores esperables del alumnado a la hora de resolver las actividades. También, en la medida de lo posible se intentará buscar su origen.

Los primeros errores esperables de este tema, aparecerían en el dominio de las funciones. Por un lado, en funciones racionales el alumnado necesita resolver ecuaciones (y podrían aparecer ecuaciones de grado mayor que dos que exijan otros métodos de resolución como la Regla de Ruffini o métodos numéricos). Por otro lado, funciones con raíces cuadradas, necesitan resolver inecuaciones que aparecen por primera vez durante este curso, y es probable, que aun no se dominen las técnicas de resolución.

También podría resultar complejo para el alumnado de esta edad comprender correctamente el concepto de función creciente en un intervalo ya que no basta con comprobar la tasa de variación con los extremos del intervalo. Hay que cotejar con todos los valores pertenecientes al interior del intervalo (que son infinitos), luego, para una correcta utilización de la definición, se debería trabajar algebraicamente lo que conlleva una gran dificultad.

En cuanto a errores propiamente de las funciones, los máximos y mínimos pueden resultar complejos, ya que se necesita diferenciar la abscisa de la ordenada. El máximo o mínimo de la función, se alcanza en $x=a$ pero el valor del máximo o mínimo es $f\,(a)$. Además, es habitual la confusión máximo (mínimo) absoluto con el mayor (menor) de los máximos (mínimos).

En la técnica de cálculo de las simetrías se vuelve imprescindible un buen control del álgebra (pues es necesario realizar cálculos algebraicos para poder después comparar expresiones). Sin embargo, el manejo del álgebra hasta ahora adquirido podría ser insuficiente.

Las operaciones de funciones, como la suma, producto y cociente, posiblemente no resulten excesivamente complicadas y, en caso de haber algún error, podría deberse al cálculo. Sin embargo, la composición y cálculo de funciones inversas conllevan una comprensión de las funciones mucho más compleja y otra vez, un control del álgebra mucho más profundo.

Para el cálculo de límites vuelve a ser ineludible manipular correctamente las expresiones algebraicas. Asimismo, para el caso particular de límites del tipo $\frac{0}{0}$ se necesita de nuevo la resolución de ecuaciones.

Por último, la noción de asíntota parece demasiado compleja para una comprensión real de ellas, salvo como un mero mecanismo de cálculo, o la idea intuitiva gráficamente, pero nunca comparando con otras formas de tendencia, como la rama parabólica.

Otra noción muy compleja y que ya se ha nombrado en la parte I del trabajo es el valor absoluto (Wilhelmi M., Godino J.D. & Lacasta, E. 2007). Además, en 4º ESO Opción B se introduce por primera vez el valor absoluto como función definida trozos luego es posible que aparezcan valores negativos de la función valor absoluto.

En resumen, la mayoría de los errores tendrán su origen en un manejo insuficiente del álgebra y, por supuesto, fallos de cálculo de todo tipo. Conceptualmente, cualquier noción que implique $\forall x$ resultará compleja, porque no se llega a comprender la amplitud del concepto. Por otro lado la composición, la función inversa y las asíntotas podrían ser difíciles de asimilar.

Capítulo 7
El proceso de estudio

Este capítulo pretende, como su propio título sugiere, plantear un proceso de estudio del tema de funciones y gráficas. Se divide en cuatro secciones: distribución del tiempo de clase (7.1), actividades adicionales planificadas (7.2), trabajo autónomo del alumnado (7.3) y modificaciones durante la experimentación (7.4).

El tema de funciones y gráficas en 4º ESO Opción B es muy extenso y sería prácticamente imposible impartirlo de forma adecuada en su totalidad. Por ello, los profesores responsables de la docencia de estos cursos en el centro donde se realizó la experimentación tienen un esquema planteado de los aspectos más importantes que quieren llevar al aula.

Esta hoja, se encuentra adjunta en el Anexo 1 (apartado A) por lo que aquí sólo se presenta un pequeño resumen de los aspectos que más influyen en los dos temas analizados.

1) Los conceptos de función, dominio, recorrido, máximos y mínimos, acotación, periodicidad y simetrías se estudian de forma algebraica como aparece en el libro.
2) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, también se ven algebraicamente, pero no con la tasa de variación.
3) Límites, continuidad y asíntotas se estudian sólo gráficamente.

Las operaciones de funciones y las discontinuidades que se aparecen también en el libro se dejan para cursos posteriores. Asimismo, en la hoja del Anexo 1 aparecen las funciones exponenciales y logarítmicas que pertenecen a otro tema del libro y han quedado fuera del estudio de este trabajo.

Una vez destacados los conceptos más importantes que queremos dar en el aula veamos cómo se pueden llevar estos a la clase.

7.1 Distribución del tiempo de clase

La Tabla 31 pretende resumir el tiempo dedicado a cada uno de los contenidos que se van a institucionalizar en el aula:

Tabla 31. Distribución de los contenidos y planteamiento de la docencia

	Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo docencia
1	Definición de función, dominio, recorrido y funciones definidas a trozos	2 horas	Profesor	Magistral
2	Ejercicios individuales del punto 1 y de repaso de funciones lineales y cuadráticas (del año anterior)	3 horas	Alumno	Estudio autónomo asistido
3	Dudas generales de los ejercicios del punto 2.	1-2 horas	Compartida	Dialógica
4	Introducción de crecimiento/decrecimiento, máximos/mínimos y acotación	1 hora	Profesor	Magistral
5	Simetría y periodicidad	1 hora	Compartida	Constructivista
6	Ejercicios de todo lo aprendido en el tema 10 del libro de referencia (puntos 1,4 y 5)	3 horas	Alumno	Estudio autónomo asistido
7	Límites y asíntotas	1 hora	Compartida	Dialógica
8	Continuidad	15 minutos	Profesor	Dialógica
9	Ejercicios puntos 8 y 9.	4 horas	Alumno	Estudio por parejas asistido
10	Examen	1 hora	Alumno	

Los dominios de funciones (punto 1 de la Tabla 31) se introducen de forma magistral a partir de unos ejemplos, haciendo un resumen de las condiciones de cada uno de los tipos de funciones.

La primera actividad programada para este trabajo se refiere al punto 4, en la introducción del crecimiento/decrecimiento, extremos (máximos y mínimos) y acotación. En esa clase magistral, se introducen los conceptos a partir de una gráfica de temperaturas del día anterior, con la que se pretende mostrar al alumnado tanto la utilidad como la necesidad de estos conceptos.

Para la simetría y periodicidad se programa una actividad adicional centrada en GeoGebra que se explica con mayor profundidad en el segundo apartado de este capítulo. Los alumnos deben realizar la actividad *a priori* y, por parejas, y, tras su ejecución se institucionaliza el concepto de funciones simétricas y periódicas.

Asimismo, al querer trabajar sólo gráficamente los límites, las asíntotas y la continuidad, los contenidos del libro no se ajustan, por lo que se seleccionan ciertas gráficas de funciones que se proyectan en GeoGebra. A la vista de las gráficas, una serie de cuestiones planteadas al alumnado junto con sus repuestas pretenden ir introduciendo los conceptos.

7.2 Ejercicios, problemas, cuestiones adicionales planificadas

En el apartado anterior se nombran ya las actividades adicionales planificadas que se centraron en GeoGebra (GGB).

La primera, dedicada a las funciones simétricas y periódicas consta de tres gráficas, dibujadas mediante GeoGebra, con un punto móvil del cual se indican su abscisa y su ordenada (Figura 34). El alumnado, en parejas, debe arrastrar ese punto, para poder rellenar la tabla de la ficha (Figura 34). También, se debe comparar la escala del fichero de GeoGebra con el adjunto en la ficha. Finalmente, una última pregunta pretende hacerles reflexionar sobre las tablas y la gráfica. Como ejemplo, se adjunta en la Figura 34, una reducción de los archivos correspondientes a la función par y se dejan para el Anexo 1 (apartado C) la función impar y periódica.

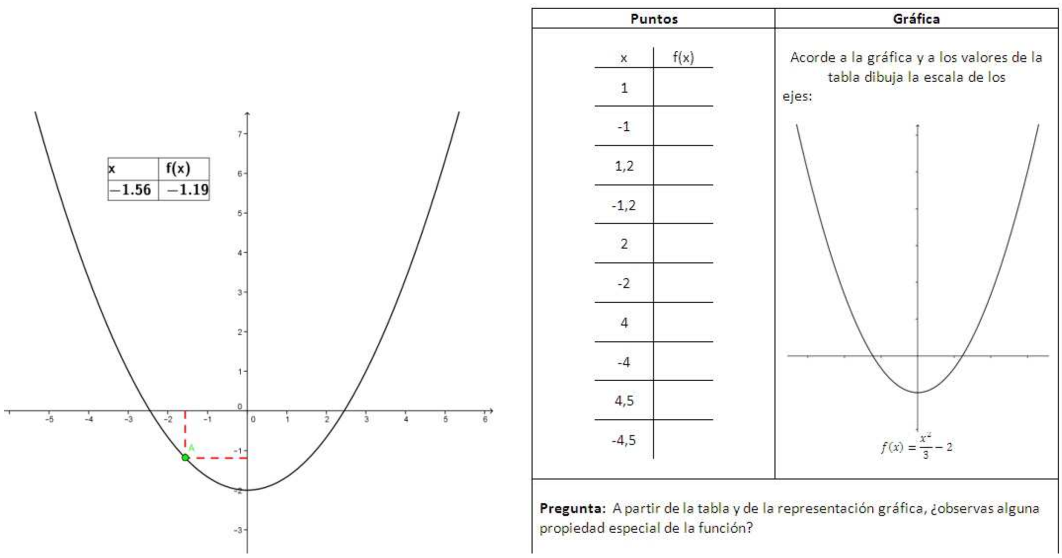


Figura 34. Esbozo actividad adicional con GGB

La introducción del límite funcional y el estudio de la continuidad de funciones se apoyan en la representación gráfica. Así, el libro de texto (Vizmanos, 2008) descrito en el capítulo 5, que tiene una orientación más analítica, precisa la elaboración de materiales adicionales que centren el estudio de las funciones en el GCF.

El empleo de GeoGebra en la actividad de límites ya no es propiamente de los alumnos como ocurre con la actividad anterior, sino como una herramienta dinámica que el docente utiliza para proyectar y resaltar aquellos aspectos más importantes en cada momento.

Así, se crean varias gráficas en GeoGebra, similares a la Figura 35, que abarcaran varias situaciones diferentes. La proyección de estos *applets* diseñados *ad hoc* se utilizan en una organización dialógica del proceso de enseñanza y aprendizaje de los tópicos funcionales (límites, continuidad y asíntotas).

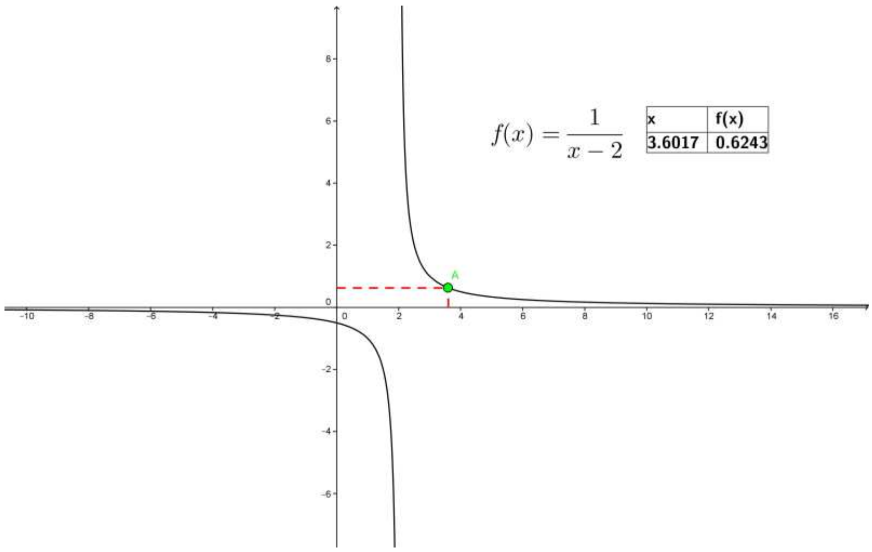


Figura 35. Ejemplo gráfica explicación límites GeoGebra

Aparte de estas actividades programadas para una mejor asimilación de la teoría, se construyen dos hojas con ejercicios acordes a lo explicado en el aula.

La primera hoja con ejercicios de repaso del año anterior y de dominios de funciones (punto 2 de la Tabla 31) se encuentra adjunta en el Anexo I apartado B.

La segunda hoja, con funciones representadas gráficamente en la que se pide hallar límites, asíntotas y continuidad (punto 9 de la Tabla 31) se adjunta en el Anexo I apartado D.

Las Figuras 36 y 37 dan un ejemplo del tipo de ejercicios que se encuentras en las hojas.

6. Halla el dominio de definición y el recorrido de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ c) $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - 8x$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 5x + 4}$ e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

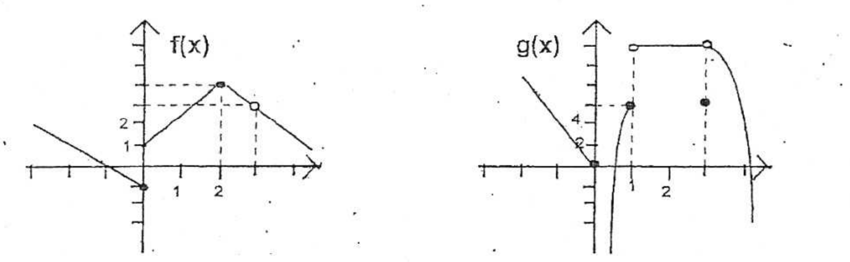
g) $f(x) = \sqrt{x^3 - 9x}$ h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{25}{x^2} - 1}$ i) $f(x) = \sqrt[3]{x+8}$

9. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = 2x + 4$ b) $y = -3x - 7$ c) $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ e) $y = 6x$

Figura 36: Ejemplo ejercicios hoja de repaso

5. Observa las gráficas y calcula lo que se pide:



a) f(0); b) f(3); c) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$; d) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; e) $\lim_{x\to 0} f(x)$; f) $\lim_{x\to 2} f(x)$; g) g(0);
h) g(1); i) $\lim_{x\to 0} g(x)$; j) $\lim_{x\to 1} g(x)$ k) $\lim_{x\to 3} g(x)$

Figura 37. Ejercicio hoja de límites gráficos

7.3 La tarea: actividad autónoma de los alumnos prevista

Si se mira la tabla de distribución de las horas de clase (Tabla 31), aparecen varias horas dedicadas únicamente a *estudio autónomo asistido* consistente en que el alumnado organice su tiempo y empiece a hacer los ejercicios en clase, mientras el docente se pasa por las mesas resolviendo dudas. La mayoría de las veces, no dará tiempo a terminar todos los ejercicios marcados, por lo que el resto se queda como ejercicio autónomo de los alumnos que deben realizar fuera de las horas de clase. La Tabla 32, resume toda la tarea autónoma que se prevé que necesitará el alumnado para realizar todas las actividades demandadas, (incluyendo las horas de trabajo autónomo del aula).

Tabla 32. Tarea autónoma del alumnado

Tipo	Tiempo Estimado	Relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje
Ejercicios individuales del dominio y de repaso de funciones lineales y cuadráticas (Anexo I, aparado D)	5 horas	Aplicación de la teoría de dominios y recorridos de funciones y repaso de funciones lineales y cuadráticas estudiadas el año anterior
Ejercicios hojas de teoría del libro de crecimiento y extremos tras exposición teórica en el aula.	$\frac{1}{2}$ hora	Consolidación teoría de crecimiento y decrecimiento, máximos, mínimos.
Actividad adicional planificado sobre simetrías y periodicidad (por parejas)	$\frac{1}{2}$ hora	Preparación para la institucionalización de los conceptos de simetría y periodicidad.
Ejercicios periodicidad y acotación del libro de referencia	1 hora	Consolidación de teoría de acotación y periodicidad
Ejercicios y problemas seleccionados tema 10 del libro de referencia	7 horas	Aplicación de los conceptos estudiados durante todo el tema. Refuerzo por la gran cantidad de ejercicios.
Ejercicios en la hoja de teoría de límites	$\frac{1}{2}$ hora	Consolidación concepto de límite. Cálculo de límites sencillos.
Ejercicios límites gráficos (Anexo 1, apartado D)	5 horas	Aplicación de los conceptos de límite, continuidad y asíntotas. Refuerzo de todo lo aprendido.

Las actividades autónomas estimadas en media hora de tiempo, pretenden trabajar los conceptos institucionalizados durante la hora anterior de clase, para conseguir que afloren las dudas afianzando los conceptos.

Por otro lado, en la hoja del Anexo 1, donde se les entregó a los alumnos los conceptos qué se iban a trabajar, aparecen también las actividades que se quería que realizaran sobre el tema 10 de funciones del libro de referencia (Vizmanos, 2008) así como sus soluciones.

Del resto de los ejercicios de consolidación (los de repaso y los de límites gráficos) no se entregaron soluciones.

7.4 Modificaciones durante la experimentación

Muchas veces, una actividad planeada no tiene los resultados esperados y algunos factores, que no se pueden controlar, modifican la actividad programada.

Durante la ejecución del punto 6 de la Tabla 31, (trabajo autónomo del tema 10 del libro (Vizmanos, 2008)), se decidió programar un examen sin avisar al alumnado que se analizará en el siguiente capítulo y que se encuentra adjunto en el Anexo I (apartado E) y reducido en la Figura 38.

A pesar de que el alumnado salió contento del examen, los resultados no fueron como ellos esperaban. En la siguiente clase, se entregaron las calificaciones y se explicaron los errores más significativos, antes de explicar los límites y asíntotas.

Al terminar la corrección, quedaban 20 minutos de clase y se comenzó la actividad planificada sobre límites. Recordamos aquí, que se había programado una clase dialógica donde los alumnos fueran respondiendo a distintos obstáculos que se les planteaban, a la vista de la gráfica de ciertas funciones. Sin embargo, debido a los resultados del examen, el estado emocional del alumnado no era el adecuado por lo que resultó más bien de tipo mayéutica. Así, se iban planteando las preguntas y, gradualmente, el propio docente iba presentando las respuestas.

Para asegurarse de que el alumnado aprovechaba las horas de clase que se dejaban para trabajar el punto 9, se apuntó en una tabla, el número de ejercicios resueltos por cada pareja al finalizar la hora de clase. Esta tabla se adjunta en el Anexo I (apartado F) y nos permitirá, más adelante, reflexionar sobre la velocidad de resolución de ejercicios.

Al finalizar toda la actividad, apenas había pasado una semana del examen; así, se decidió intercambiar el examen final, por un ejercicio de las hojas que debían entregar para su corrección.

Capítulo 8
Experimentación

En este último capítulo del trabajo, se pretende analizar los resultados de la experimentación llevada al aula y, en la medida de lo posible, sacar las conclusiones que nos permite el estudio en un grupo tan reducido.

8.1 Muestra y diseño de la experimentación

La experimentación fue llevada a cabo en un aula de 4º ESO Opción B de un centro concertado de Pamplona. Para este grupo, formado por 19 alumnos, se diseñó el proceso de estudio explicado en el capítulo 7 y que se llevó al aula sin pretest (sin prueba previa de diagnóstico).

Además de las respuestas de nuestro grupo experimental en las actividades programadas, poseemos respuestas del examen de otro grupo del centro, grupo de control, formado por 23 alumnos que no recibieron el tratamiento pero en el que se introdujeron los mismos conceptos.

Las fases de la experimentación se añaden en la Figura 38. X_{E1} y X_{E2} son fases consecutivas de enseñanza-aprendizaje del grupo experimental de las nociones de propiedades de funciones (X_{E1}), y límites y asíntotas (X_{E2}). Las O_{E1} y O_{E3} corresponden a observaciones sobre actividades sólo realizadas en el grupo experimental. Mientras que O_{E2} y O_{C2} son los resultados del examen, tanto del grupo experimental, como del grupo de control.

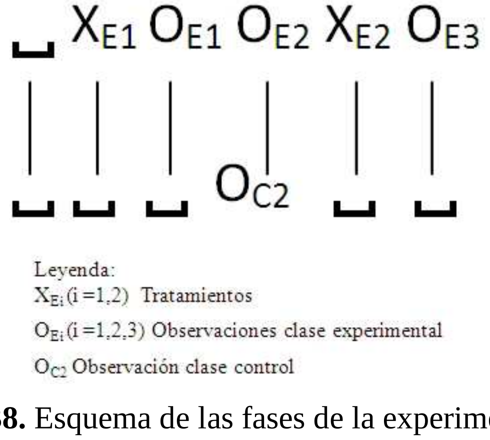


Figura 38. Esquema de las fases de la experimentación

El número de respuestas de cada actividad no es muy elevado, por lo que nos limitaremos a una estadística descriptiva de estos. Siempre que se pueda, se diferenciará las respuestas del grupo experimental de los del grupo de control, pero se añade el recuento con el total de respuestas. También, en algunos casos, se realiza un estudio cualitativo con imágenes de las respuestas de ciertos alumnos.

8.2 Realización y posibles errores de los cuestionarios

En este apartado, por un lado, se adjuntan los cuestionarios realizados en el aula (8.2.1) y por otro, se relacionan sus ejercicios con los errores esperables del apartado 6.2 (8.2.2).

8.2.1. Cuestionarios realizados

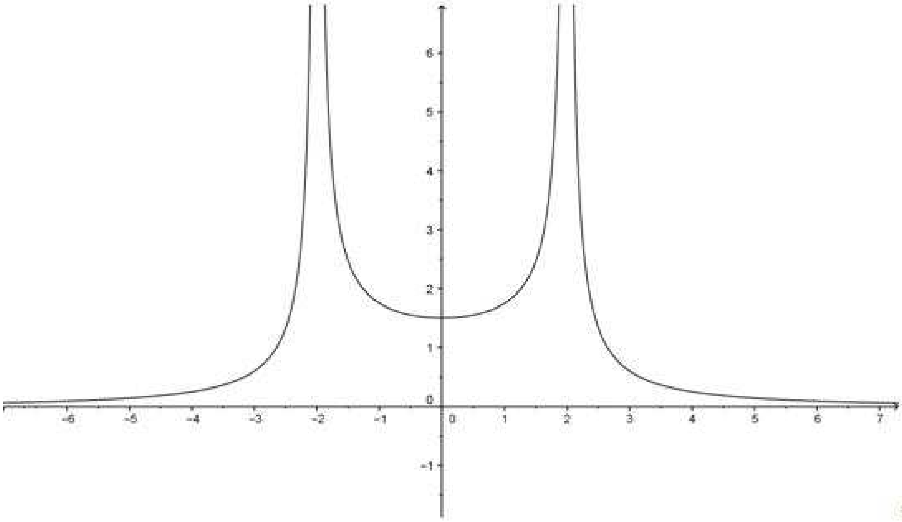
El primer cuestionario con repuestas del alumnado, corresponde a las fichas de GeoGebra de la actividad de simetrías y periodicidad que se realizó únicamente en el grupo experimental.

El siguiente cuestionario, se corresponde con el examen de los contenidos del tema 10 del libro (Vizmanos, 2008). Este contiene, como se puede ver a tamaño reducido en la Figura 39, un ejercicio de dominios con tres apartados (polinomio, racional y radical), un ejercicio de ver las propiedades gráficas de una función, un ejercicio sobre simetrías que hay que hallar algebraicamente y dos ejercicios de representación de funciones definidas a trozos (una con una parábola y una recta y la otra un valor absoluto de una función lineal).

Examen funciones 4º ESO

Nombre y Apellido: **19/4/2013**

1. Halla el dominio de las siguientes funciones: (1,5 puntos)
   a) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-8x+7}$
   b) $f(x) = x^5 - 4x^4 + 6x^2 - 9$
   c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
2. Función gráfica (3 puntos)



   a) Crecimiento y decrecimiento. (0,5 puntos)
   b) Máximos y mínimos relativos y absolutos. (0,5 puntos)
   c) ¿La función presenta algún tipo de acotación? En caso afirmativo, ¿de qué tipo? Indica la cota. (0,5 puntos)
   d) ¿La función es simétrica? Define función par e impar. (0,5 puntos ver que la función es simétrica, 0,5 puntos definición de función par y 0,5 puntos definición función impar).
3. Demuestra si hay algún tipo de simetría: (1,5 puntos)
   a) $f(x)=x^3-8x$
   b) $f(x)=5x^2-x$
   c) $f(x)=\frac{x^2+3}{x}$
4. Dibuja la siguiente función: (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & si\ x \leq -1 \\ x + 3 & si\ x > -1 \end{cases}$$

5. Dibuja la siguiente función: (2 puntos)

$$f(x) = |2x - 5|$$

Figura 39. Examen interpretación y representación gráfica

Como ya se había realizado un examen, tras el estudio de límites, continuidad y asíntotas ya no se iba a realizar ningún test, por lo que se pidió que se entregara uno de los ejercicios finales de las hojas. En él se pedían todas las propiedades de la función a la vista de su gráfica (que aparece adjunta en la Figura 40).

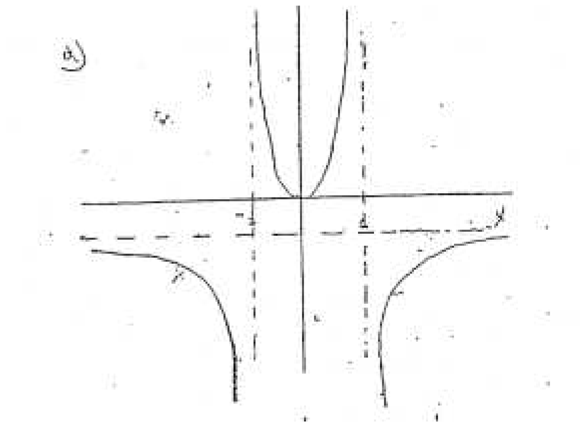


Figura 40. Ejercicio hoja de límites

8.2.2 Errores esperables en los cuestionarios

En general, los cuestionarios contienen varios de los errores esperables que se nombran en el apartado 6.2.y que se pretenden destacar en esta sección, así como otro tipo de consideraciones que pueden ayudar al análisis de resultados que se realizará más adelante.

Por un lado, en el ejercicio de GeoGebra se decidió dejar la última pregunta abierta esperando que compararan qué ocurría a la función y a la tabla de valores. Sin embargo, la mayoría de los alumnos empezaron a hablar del crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos ya que fue lo institucionalizado el día anterior.

En el examen, se espera que los alumnos aborden algebraicamente los ejercicios 1 y 3, de dominios y simetrías., aunque en la simetría podrían intentar otros métodos de resolución como el gráfico o la tabla de valores. También se espera que en las representaciones gráficas se calcule el vértice de la parábola y, en el valor absoluto, se determine primero la función a trozos.

A lo largo del examen aparecen todo tipo de ecuaciones de segundo grado (completas e incompletas) para comparar su manejo. El resto de los posibles fallos del examen, se adjuntan en la Tabla 33.

Finalmente, los errores esperables del ejercicio de la hoja de límites y continuidad serían clasificar el mínimo como mínimo absoluto, y debido a que el recorrido de la función es $\mathbb{R} \setminus [-1,0)$, pensar que la función está acotada.

Tabla 33. Tarea autónoma del alumnado

Posibles dificultades del examen
Ejercicio 1: Se pide el dominio de tres funciones. Posibles fallos podrían ser resolver mal la inecuación y eliminar del dominio de la función racional los valores que anulan el numerador. También consideramos un fallo importante la falta de rigor en la notación matemática, ya que se ha exigido constantemente durante la resolución de ejercicios de dominios en el aula.
Ejercicio 2: Análisis de las propiedades de la función a la vista de su gráfica. a) Confundir en los intervalos de crecimiento y decrecimiento el dominio con la imagen (por ejemplo, decir que decrece de (-2; 1,5) en vez de (-2,0)) b) Confundir el mínimo relativo con el absoluto c) No ver que la cota es 0 (confundirla con 1,5 que es el mínimo relativo). d) En la definición de simetrías dejarse la condición para todo x.
Ejercicio 3: a) No hay error remarcable b) Pensar que siempre tiene que haber simetría. c) No ser capaces de comparar correctamente las funciones por ser una fracción con denominador negativo. En general, hay dos funciones impares y otra que no es nada. Se pueden equivocar pensando que alguna tiene que ser par.
Ejercicio 4: En el cambio de nombre confundir el punto relleno y el punto abierto. Hallar la parábola simplemente por puntos cuando se exige hallar el vértice y los cortes con los ejes
Ejercicio 5: No generalizar bien la definición de valor absoluto y que el vértice se quede en el 0. Que les salgan valores negativos.

8.3 Resultados

Para analizar las respuestas obtenidas en la clase, tenemos a nuestro alcance los ejercicios de la actividad de GeoGebra y la actividad final nombrada arriba. Asimismo, poseemos los resultados de los exámenes, no sólo de la clase en cuestión sino de ambos grupos del centro.

Antes de comentar las respuestas, se determina la velocidad de resolución de los ejercicios del grupo experimental que se encuentra en el Anexo 1 apartado F. para ver la homogeneidad, ya que, si el grupo funciona de forma homogénea, la intervención pedagógica resulta más sencilla.

Tras el primer día, parece que el ritmo de los estudiantes es distinto, puesto que, mientras algunas parejas han realizado 5 ejercicios, otras apenas han logrado resolver 2. Sin embargo, el 2º día parece que esa disparidad se reduce, e incluso el último día todos los alumnos han terminado y no tienen ninguna duda.

Las primeras respuestas que obtenemos corresponden al ejercicio de GeoGebra. Recordemos, que la pregunta de las hojas de simetrías es un poco abierta, lo que da lugar a una gran variedad de respuestas. La Tabla 34, pretende resumir el número de parejas, de un total de 10, que comentaron cada propiedad en cada una de las fichas.

Tabla 34. Respuestas del ejercicio de GeoGebra

Resultados	Crecimiento/ Decrecimiento	Máximos/ Mínimos	Acotación	Simetría
Parábola (simetría par)	7	7	3	9
Polinomio (simetría impar)	7	8	1	6

En la Tabla 34 se muestra que en la ficha de simetría par, 7 parejas hablan del crecimiento y decrecimiento. Sin embargo, hay 3 que confunden la abscisa con la ordenada como en la Figura 41.

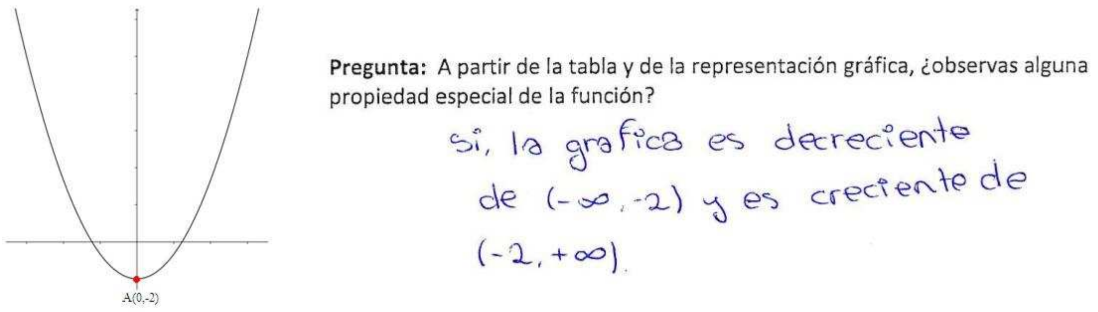


Figura 41. Respuesta incorrecta sobre crecimiento y decrecimiento

Recordemos que, en un principio, un error esperable, cuando hay varios máximos (mínimos) relativos, es identificar el máximo (mínimo) absoluto con el mayor máximo (menor mínimo) de los relativos, sin atender a si la función es o no acotada. Efectivamente, de las 8 parejas que hablan de los extremos en la función impar, 4 los confunden (Figura 42).

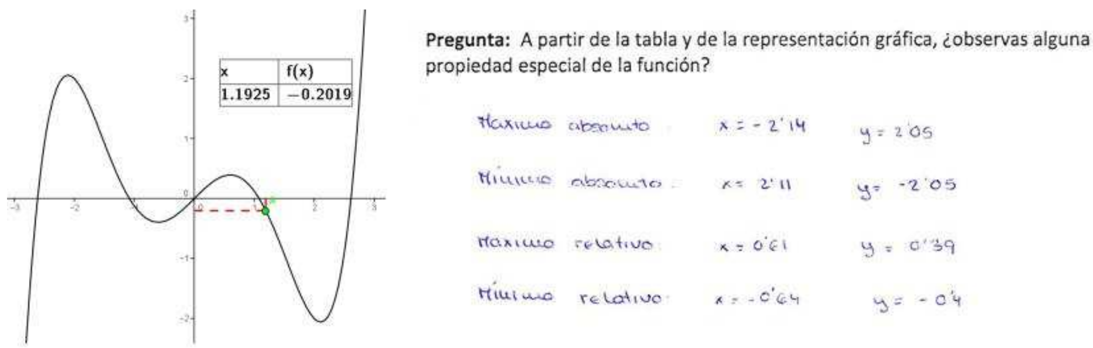


Figura 42. Respuesta incorrecta sobre máximos y mínimos

Del ejercicio de periodicidad todas las parejas contestaron correctamente el valor de la función, pero sólo 5 concluyeron correctamente que la función era periódica.

Otras 2 parejas, a pesar de que son capaces de hallar correctamente los valores de la función, y entienden lo que le ocurre a esta, no lo describen adecuadamente como puede verse en la Figura 43.

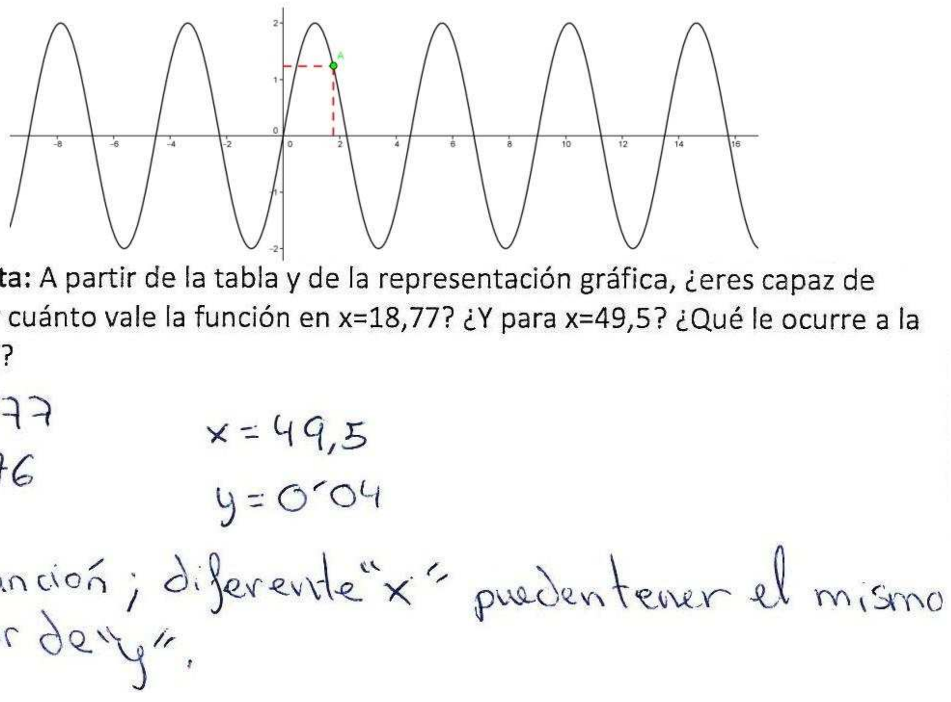


Figura 43. Respuesta hoja periodicidad

Pasemos ahora a analizar el examen. Este, como hemos nombrado anteriormente, se hizo simultáneamente en los dos grupos de 4º ESO Opción B del centro de prácticas por lo que poseemos muchos más ejercicios que analizar, (aunque no todos han recibido el tratamiento).

En el primer ejercicio se ha decidido analizar tres posibles fallos que se recogen en la Tabla 35.

- Imponer al dominio de la función racional la condición de numerador no nulo.
- La resolución de las dos ecuaciones de segundo grado.
- Resolver mal la inecuación.

Tabla 35. Respuestas del ejercicio de GeoGebra

Ejercicio 1	Clase Experimental	Clase de control	Total
Anular denominador y numerador	1	4	5
Resolver mal alguna ecuación de segundo grado	**4**	**7**	**11**
Ecuación completa	0	3	3
Ecuación incompleta	4	5	9
Error en la inecuación	**6**	**9**	**15**
Fallo procedimiento	3	5	8
Fallo cálculo	3	4	7
Total de resultados	18	21	39

En el segundo ejercicio una gran mayoría confunde el mínimo, ya sea al calcularlo, por no clasificarlo (relativo o absoluto), o clasificándolo erróneamente como mínimo absoluto. También analizamos el error en la cota. Por ejemplo se adjunta en la Figura 44 la respuesta de un alumno que comete algunos de los errores más observados.

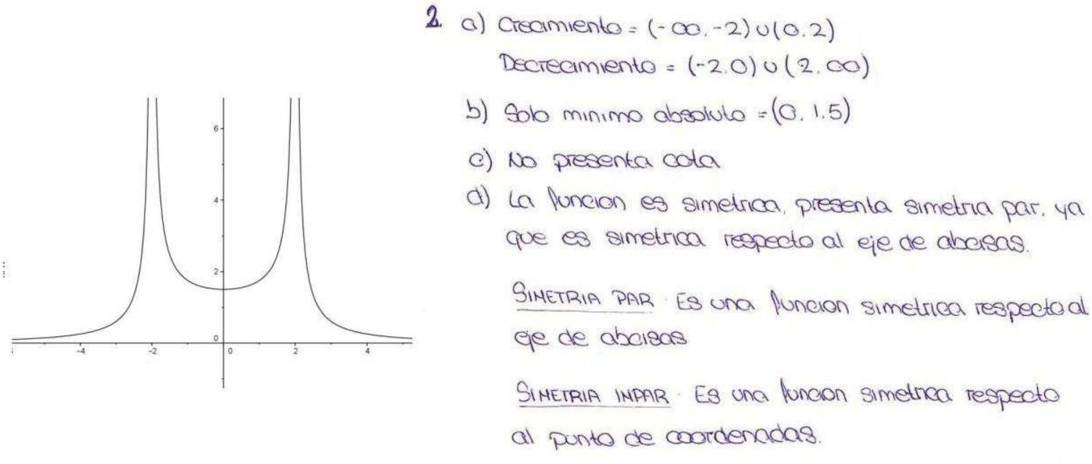


Figura 44. Respuesta estándar al ejercicio 2

En algunos exámenes también se ha visto la definición de simetría con la regla de cálculo gráfica, similar al aquí adjunto (aunque este en particular confunde eje de abscisas y de ordenadas). Otro aspecto llamativo es que dentro de los exámenes que dan la definición algebraica la mayoría parecen olvidar que se debe cumplir para todo x como en la Figura 45.

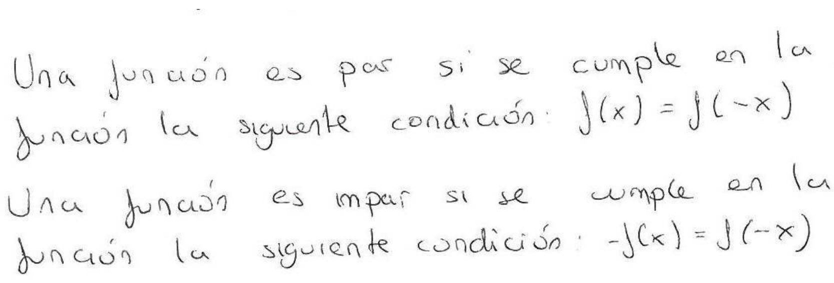


Figura 45. Definición función simétrica

En la Tabla 36, se resume toda la información extraída de las respuestas.

Tabla 36. Análisis respuestas ejercicio 2 del examen

Ejercicio 2	Clase Experimental	Clase de control	Total
Error en el mínimo	**3**	**20**	**23**
Sin apellido	0	6	6
Mal apellido	2	11	13
Mal calculado	1	3	4
Acotación	7	**16**	**23**
No acotada	2	7	9
Mal cota	5	9	14
Definición algebraica de simetría incompleta	15/17	11/12	26/29
Total de resultados	18	23	41

En el tercer ejercicio se pide comprobar algunas simetrías. En el grupo experimental, se había avisado que una demostración mediante una tabla de valores no era suficiente y se consideraría errónea. Sin embargo, en el otro grupo, parece que no se dijo nada, por lo que primero se va a analizar las diferentes formas que tienen de abordar el ejercicio en la Tabla 37.

Tabla 37. Análisis respuestas ejercicio 3 del examen

Ejercicio 1	Clase Experimental	Clase de control	Total
Resolución algebraica	18	15	33
Resolución por valores		8	8
Resolución gráfica		3	3
Cálculo f(-x) y comparación	15	5	20
Comprobación de la ecuación	3	17	20
Total de resultados	18	22	40

En el grupo experimental y en el grupo de control se enseñaron procedimientos diferentes para ver la simetría de las funciones. Por un lado, en el grupo experimental se calcula f $(-x)$ y comparan con f (x). Por otro, en la clase de control se plantean la ecuación *f* (-*x*)= *f* (*x*) y se comprueba si es una identidad o un absurdo como se puede comprobar en la Figuras 46 y 47.

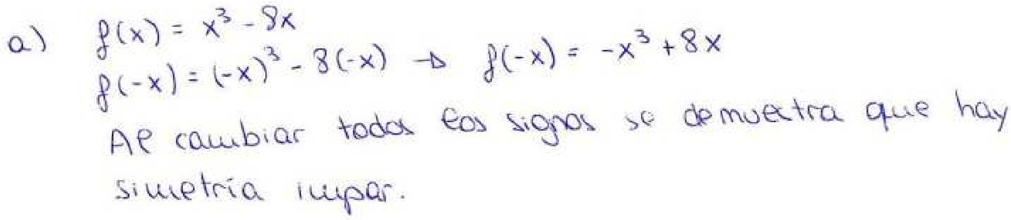


Figura 46. Respuesta estándar clase experimental

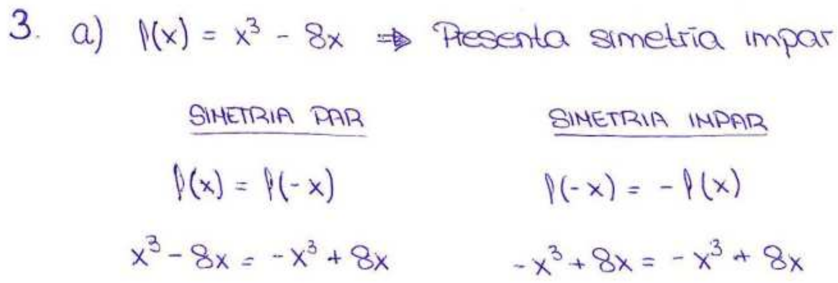


Figura 47. Respuesta estándar clase de control

En este caso particular, no todos los apartados tienen la misma dificultad por lo que contaremos el número de respuestas correctas de cada apartado por separado (Tabla 38). Por otro lado el error más llamativo resulta el cálculo de –*f* (*x*) en el último apartado (Figura 48).

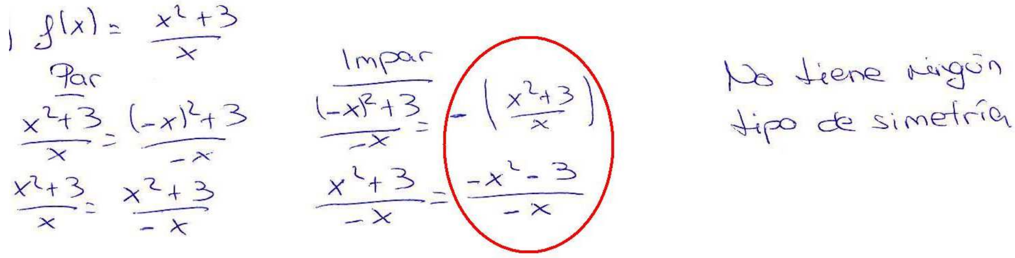


Figura 48. Error cálculo –f(x)

Tabla 38. Análisis de respuestas correctas ejercicio 3

Ejercicio 3	Clase Experimental	Clase de control	Total
Apartado a incorrecto	2	4	6
Apartado b incorrecto	4	3	7
Apartado c incorrecto	11	13	24
Error fracción	1/9	8/12	9/21
Resultados analizados	18	15	33

El error de la fracción se computa con un número distinto de respuestas, porque la mayoría de la clase experimental, compara los resultados sin escribir explícitamente $-f(x)$. Así, cuando está correcto sabemos que son capaces de hallar correctamente $-f(x)$ pero si se han confundido no podemos estar seguros que se debe a un error de cálculo de $-f(x)$.

El ejercicio 4 trata de ver si el alumnado ha comprendido el concepto de función definida a trozos. Además, se aprovecha para ver si son capaces de representar una parábola y una recta. Igual que ocurría en el ejercicio 3, al alumnado del grupo experimental se le avisó, que para que la representación de una parábola se considerara correcta, tenían que estar plasmados en la hoja el cálculo del vértice y cortes con los ejes. Sin embargo, en el grupo de control parece que esta advertencia no se hizo. Se pueden ver los distintos resultados en la Tabla 39.

Tabla 39. Análisis respuestas ejercicio 4

Ejercicio 4	Clase Experimental	Clase de control	Total
Cálculo del vértice	15	5	20
Cálculo puntos de corte	15	1	16
Representación de la parábola			
Correcta	8	4	12
Forma parabólica pero incorrecta	6	14	20
Sin forma parabólica	4	5	9
Total	18	23	41

Donde la forma parabólica incorrecta más habitual es una parábola sin vértice como la expuesta en la Figura 49.

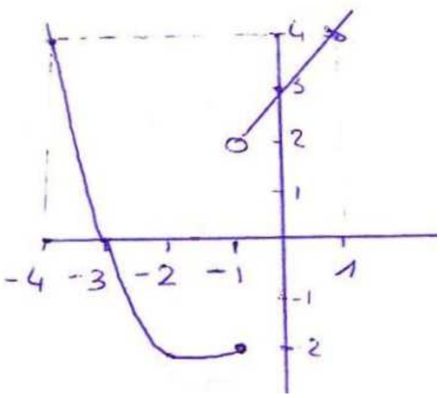


Figura 49. Parábola sin vértice

El último ejercicio del examen, pide representar el valor absoluto de una función lineal. En principio, en ambas clases se había avisado que un valor absoluto primero había que trocearlo en una función definida a trozos, sin embargo, no todos lo hacen. Por otro lado, parece importante estudiar el número de alumnos que obtienen valores negativos de la función y no son conscientes de su error como el de la Figura 50. El recuento de casos de todos estos aspectos se encuentra en la Tabla 40.

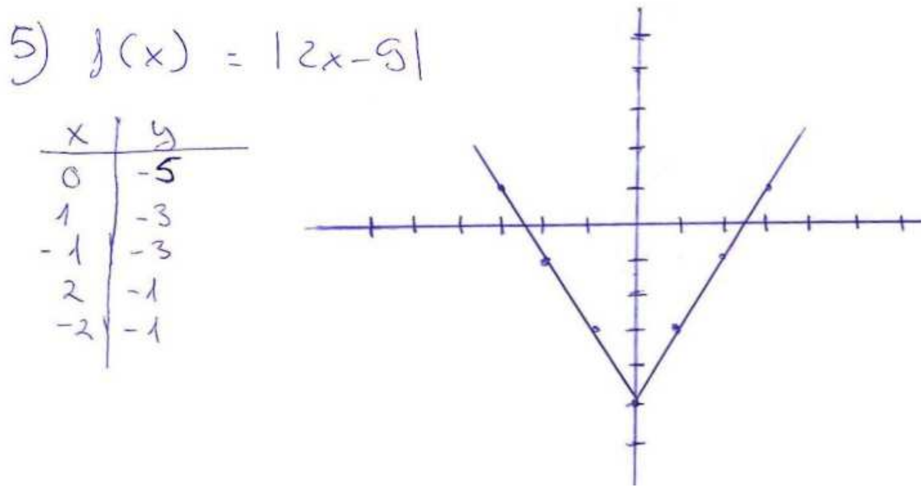


Figura 50. Valor absoluto con valores negativos

Tabla 40. Análisis respuestas ejercicio 5

Ejercicio 5	Clase Experimental	Clase de control	Total
No determinan la función a trozos	7	6	13
Determinan la función a trozos	**9**	**15**	**24**
En el 0	6	5	11
En el 2,5	3	10	13
Valores negativos	9	13	22
Total respuestas	16	21	37

Del ejercicio final de la hoja de límites solo tenemos respuestas del grupo experimental. El enunciado pide calcular todas las propiedades de la función a partir de su gráfica (Figura 40). Sin embargo, no todos los alumnos hablan de todas las propiedades, así que el número de respuestas es distinto para cada propiedad.

Recordemos que las posibles dificultades del ejercicio que se han nombrado anteriormente son su recorrido que es $\mathbb{R}\setminus[-1,0)$ y errores derivados de él, como el mínimo y la acotación. El análisis de los resultados se presenta en la Tabla 41.

Tabla 41. Análisis respuestas ejercicio final de límites

Ejercicio Final	Correcto	Incorrecto
Dominio	15	3
Recorrido	15	3
Crecimiento/decrecimiento	16	0
Máximos/mínimos	16	2
Simetría	18	0
Acotación	12	4
Asíntotas	13	1
Sólo verticales	3	
1 horizontal, 1 vertical	1	
Todas	9	

8.4 Discusión de los resultados

Este último apartado pretende meditar sobre las respuestas obtenidas y sacar la mayor información de ellas aunque como se trata de un grupo muy reducido la información no será extrapolable a la población.

De la primera tabla de resultados, se puede destacar dos aspectos: uno pedagógico y otro didáctico.

Por un lado, el día anterior al ejercicio, se había institucionalizado en la clase los conceptos tanto de crecimiento, decrecimiento; extremos como la acotación. Así, desde el punto de vista pedagógico, era de esperar que si los alumnos nombraban algo de la monotonía de la función y sus extremos, nombrarían también su acotación. Sin embargo, mientras que al menos 7 parejas hablan de monotonía y extremos, sólo 3 nombran algo de acotación.

Por otro lado, la acotación es un concepto visual sencillo desde el punto de vista del profesor, (gráficamente depende de si se puede encontrar una recta horizontal, tal que, la función quede en su totalidad por debajo o por encima). Sin embargo, desde el punto de vista didáctico, la acotación resulta más complicada, como puede verse a lo largo de los resultados obtenidos de todas las funciones.

Además, si se miran las tablas de la parte I se puede ver que la acotación es un concepto nuevo en este curso que se había introducido por primera vez el día anterior.

El propósito principal de la actividad de GeoGebra, que consistía en recordar las simetrías, parece lograrse por la mayoría de las parejas aunque se puede inferir una diferencia entre el dominio de la simetría par (9 parejas) y la simetría impar (6 parejas).

Incluso se pueden encontrar parejas que, a la vista del ejercicio anterior, aclaran que la función no es simétrica (a pesar de poseer simetría impar), como se ve en el fragmento extraído de una respuesta en la Figura 51.

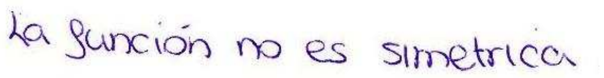


Figura 51. Fragmento respuesta ejercicio de simetría impar

El primer ejercicio del examen, nos ayuda a analizar, no sólo los dominios de las funciones sino también la resolución de ecuaciones e inecuaciones.

Así, el 28,2% de los exámenes contienen algún error en una ecuación de segundo grado. También, se advierte una diferencia según el tipo de ecuación ya que sólo el 25% de los errores de las ecuaciones son en ecuaciones completas mientras que el otro 75% de los errores son en ecuaciones incompletas.

Las inecuaciones parece que les resultan complicadas, ya que más del 35% del alumnado no llega a la solución correcta (un 50% por errores de cálculo y otro 50% por error en el procedimiento).

En el ejercicio 2, lo más llamativo es la gran diferencia entre el grupo experimental y el grupo de control en la pregunta de mínimos y en la acotación. No obstante, esta diferencia puede entenderse si recordamos los análisis de los ejercicios de GeoGebra realizados por el grupo experimental (Figura 52).

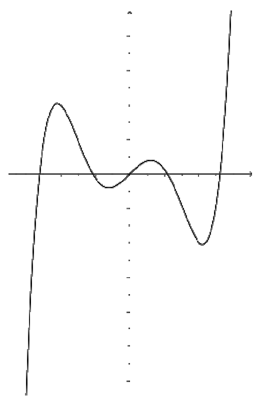


Figura 52. Función impar

De las 8 parejas que comentaron algo sobre máximos y mínimo, 4 clasificaron como máximo absoluto al situado a la izquierda de la imagen.

Por ello, al día siguiente, con los ejercicios corregidos, se remarcó la diferencia entre máximo absoluto y el mayor de los máximos y se repitió la definición comparándola con el ejercicio de GeoGebra.

Igualmente, como algunos alumnos no entendían la definición de acotación, esta se repitió por comparación con las funciones constantes $f(x) = k$, lo que resultará importante en las cuestiones abiertas.

El ejercicio 3, por su parte, muestra un dominio insuficiente del álgebra por muchos de los alumnos de este curso. Así, algunos intentan demostrar la simetría mediante una tabla de valores, antes que enfrentarse a la función de forma analítica. Incluso 3 prefieren intentar representarla para, a la vista de su gráfica, deducir la simetría.

En vez de analizar los respuestas clase a clase, para el ejercicio 4 vamos a considerar el total. Así, de 12 alumnos que logran dibujar la parábola correctamente 11 han hallado el vértice de la parábola (ya sea explícitamente o añadiendo el punto en la tabla de valores).

Del mismo modo, de los 20 que dibujan forma parabólica pero no correcta del todo como en la Figura 49, sólo 5 tenían calculado el vértice. Así, podemos concluir que hallar el vértice de la parábola ayuda a una correcta interpretación de la función y a representarla más fielmente, aunque no se puede decir que asegure su correcta representación ya que 7 alumnos que tenían hallado el vértice no han sido capaces de sustraer de él la información necesaria.

Por último, se demuestra que el alumnado aun no domina el concepto de valor absoluto. De hecho, casi un 60% de las representaciones gráficas de la función $f(x)=|2x-5|$ tienen algún valor negativo en la tabla de valores o en la gráfica (Figura 50).

Incluso 4 alumnos (más de un 10 %) ni son conscientes del valor absoluto e interpretan la función como $f(x)=2x-5$ como se expone en la Figura 53.

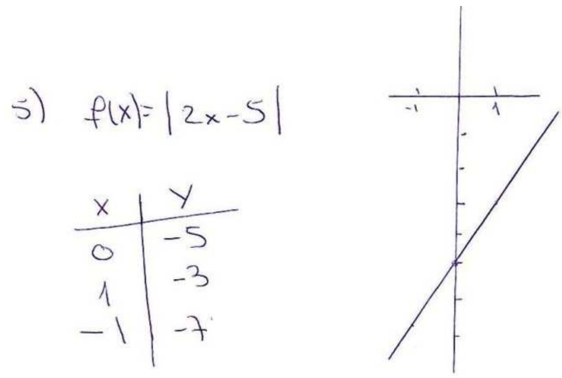


Figura 53. Representación valor absoluto como recta

Asimismo, parece que en el grupo de control, se insistió mucho más en ejercicio de este estilo de representar valores absolutos, ya que más de un 70% del alumnado la trocea y un 35% lo hace en el punto correcto, frente al 56% del alumnado de la clase experimental que trocea la función y sólo un 18,75% en el 2,5. (Tabla 40).

Finalmente, la última respuesta del grupo experimental, permite analizar los conceptos nuevos introducidos este año. Así, un error esperable podría ser considerar el mínimo absoluto y no relativo; o decir que la función está acotada.

Sin embargo el concepto de máximo y mínimo absoluto o relativo, parece que ha quedado bastante claro, ya que, en GeoGebra, se comenzó con un 50% de errores. En el examen, ya se había disminuido a un 13,04% (resultados de la Tabla 36, del grupo experimental) y finalmente, en este último ejercicio sólo hay un 5,55% de error (tabla 41).

La acotación, por su parte, parece quedar un poco menos afianzada. Esto puede deberse a que en el aula se tuvo que volver a explicar y se improvisó una explicación mediante la comparación de $f(x)$ con otra función $g(x) = k$ con k constante que quedó incompleta (sólo relacionada con el ejercicio particular que se estaba corrigiendo).

El alumnado generalizó el concepto a que si existe una recta horizontal que no corta a la función entonces está acotada. Sin embargo, como se puede ver en la Figura 54, no es tanto que la función corte o no a la recta horizontal, sino que quede, en todo su dominio, por encima o por debajo.

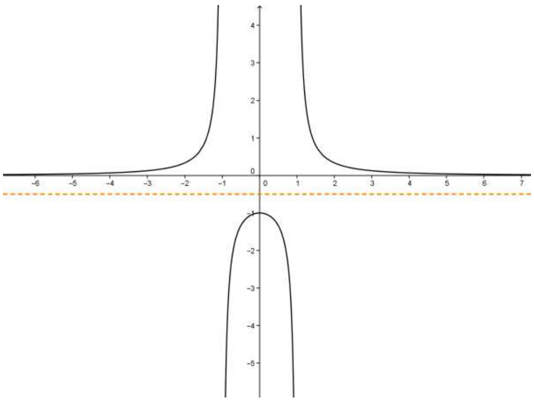
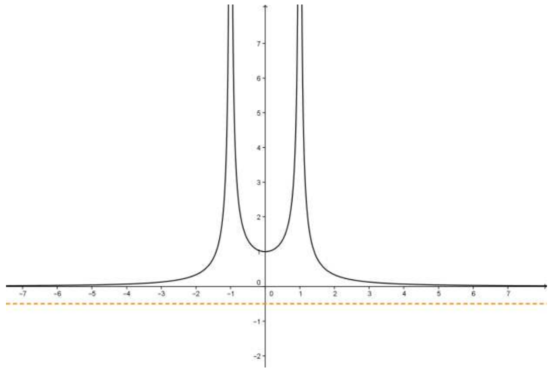
No acotada	**Acotada**
	

Figura 54. Función acotada y no acotada

En general, el análisis de resultados concuerda bastante con los errores esperados del capítulo 6. Así, la mayoría de los errores observados se deben a dificultades epistemológicas de las matemáticas y no tanto del proceso de enseñanza seguido, aunque se observan diferencias entre los grupos según qué conceptos se institucionalizaran con mayor profundidad.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Síntesis

Si se analiza todo el trabajo en general, se puede ver que el currículo, se organiza en forma espiral, donde cada año se van introduciendo nuevos conceptos. Sin embargo, resulta muy extenso y complicado de institucionalizar en su totalidad.

Se pueden encontrar varias contradicciones en el currículo a lo largo de la etapa escolar, pero aun son mayores las diferencias entre los libros de texto y el currículo.

Los libros son una buena guía del estudio a seguir, aunque es tarea del profesor analizarlos y descubrir sus carencias y errores. Así, hay partes redactadas convenientemente mientras que otras podrían crear disfunciones en el proceso de estudio y errores en el alumnado, por lo que convendría revisarlos y aún renunciar a su enseñanza.

Asimismo, la mayoría de las actividades de los libros son ejercicios que exigen poca reflexión. Sin embargo, científicos expertos en la didáctica de las matemáticas sugieren otro tipo de problemas y actividades más abiertas ya que obtienen mejores resultados.

Este contexto institucional (currículo y libros de texto) sirve de referencia para el análisis de un proceso de estudio puesto en marcha con estudiantes de 4º ESO, opción B. Por un lado, mirando el libro de texto de referencia, se verifican las ideas recogidas en la primera parte Por ello, se plantearon unas nuevas actividades más acordes con aquello que se quería enseñar. A nuestro parecer, la actividad de GeoGebra resultó adecuada ya que después parece que han comprendido bastante bien los conceptos allí introducidos.

Conclusiones

Las pruebas experimentales confirman la tesis, largamente estudiada en la bibliografía, según la cual gran parte del alumnado aun no posee el dominio eficaz del álgebra que se presupone alcanza en la etapa. Incluso los procedimientos de resolución de ecuaciones que llevan aplicando 3 años, les resultan complicados.

Tampoco parece el alumnado muy preparado para comprender los conceptos más complicados del tema: como tasa de variación, límite o asíntotas.

Aunque el proceso de enseñanza pudiera ser el adecuado, podemos concluir que el tiempo es insuficiente para introducir correctamente todos los conceptos. Así, mientras un profesor se centraba en unas ideas (que su grupo consigue resolver adecuadamente), el otro recalcaba otras (donde vuelve a haber diferencias en el número de respuestas correctas entre el grupo de control y el grupo experimental).

Cuestiones abiertas

Queda abierto, por un lado, el estudio del abanico de posibilidades que se abre al introducir las funciones definidas a trozos.

Por otro lado, al explicar la acotación de las funciones, se descubrió, de forma inconsciente, una posible propuesta para introducir el concepto mediante la comparación de funciones.

Un esbozo de esta propuesta sería:

- Representar ciertas funciones constantes: $f(x)=0$, $f(x)=3$, $f(x)=-5$ $f(x)=7$…
- ¿Qué forma tiene $f(x)=k$? ¿de qué depende si está por encima o por debajo del eje de abscisas?
- Comparar $f(x)=k$, $f(x)=k+1$.
- Representar una $f(x)$ que cumpla que $f(x) \leq g(x)=3\ \forall x$?
- ¿Qué significa gráficamente que $f(x) \leq g(x)=3\ \forall x$? ¿Qué significa gráficamente que $f(x) \geq g(x)=15\ \forall x$? ¿Qué significa que $f(x) \leq g(x)=k\ \forall x$? ¿Qué significa que $f(x) \geq g(x)=k\ \forall x$?
- ¿Qué puede ocurrir si comparo $f(x)$ con $g(x)=k$? (Institucionalización).

Reforzar en la institucionalización que se trata de que en todo su dominio se quede por encima o por debajo y contrastar con alguna función definida a trozos donde queden partes por encima y otras por debajo.

Referencias:

1) Álvarez M.D., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redondo, M. & al. (2008). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid: Santillana.
2) Álvarez M.D., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redondo, M. & al. (2008). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid: Santillana.
3) Vizmanos J.R., Anzola, M., Bellón, M & Hervás, J.C. (2006). *Matemáticas para 3º de Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: SM.
4) Vizmanos J.R., Anzola, M., Santos, I. & Hervás, J.C. (2008). *Matemáticas para 4º (Opción B) de Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: SM.
5) González, C., Llorente, J. & Ruíz, M.J. (2008). Matemáticas *para 1º Bachillerato de Ciencias Sociales*. Madrid: Editex.
6) Rey, M.J., Santamaría, C. (2008). *Matemáticas para 1º Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnológico*. Madrid: Santillana.
7) Barbero, M.J., Gaztelu, A.M., González, A., Lorenzo, J., Lucas, M., Machín, P. & al. (2008). *Matemáticas para 2º Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnológico*. Madrid: Santillana.
8) Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
9) Godino, J. D. y Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos.[Disponible en (13 junio 2013): http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm]
10) Rodriguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico.* Tesis doctoral. [Disponible en (17 junio 2013): http://biblioteca.ucm.es/tesis/edu/ucm-t28687.pdf]. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
11) Wilhelmi, M. Godino, J.D. & Lacasta, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions. The case of the absolute value.*International Electronic Journal of Mathematics Education,* 2(2). [Disponible en (13 Junio 2013): http://www.iejme.com/]
12) Sociedad Andaluza de Educación Matemática. (2003). *Principios y Estándares para le eduación matemática.*Granada: Proyecto Sur Industrias Gráficas, S.L.
13) Fonseca, C.; Casas, J.M.; Bosch, M.; Gascón, J. (2009). Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. En González, M. J.; González, M. T.; Murillo, J. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática.*

ANEXO I

A. Hoja conceptos y ejercicios de funciones

UNIDAD 7. Funciones. Matemáticas 4º ESO opción B.

1 TEORÍA

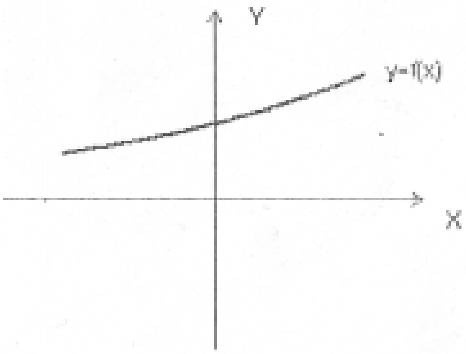
1.1 Concepto de función. Dominio. Imagen.
Página 173.

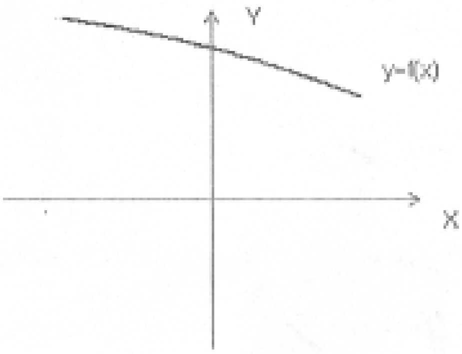
1.2 Funciones definidas a trozos.
Página 181.

1.3 Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

Una función f(x) es *creciente* en un intervalo (a, b), si para dos valores cualesquiera del intervalo, se cumple que: $x_2 > x_1$ $f(x_2) > f(x_1)$ es decir, cuando en la gráfica de una función creciente nos movemos hacia la derecha también nos movemos hacia arriba.

Una función f(x) es *decreciente* en un intervalo (a, b), si para dos valores cualesquiera del intervalo, se cumple que: $x_2 > x_1$ $f(x_2) < f(x_1)$, es decir, cuando en la gráfica de una función decreciente nos movemos hacia la derecha también nos movemos hacia abajo.





Página 175.

1.4 Funciones periódicas, acotadas y simétricas.
Páginas 176-177.

1.5 Límites de una función
Páginas 191-192.
Sólo vamos a ver el concepto gráfico de límite, no el método analítico.

1.6 Continuidad de una función
Página 196. Sólo vamos a estudiar las discontinuidades gráficamente.

1.7 Asíntotas
Página 210. Sólo vamos a estudiar las asíntotas gráficamente.

1.8.Función exponencial y logarítmica
Páginas 210-215.

2 EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Hacer sólo los ejercicios y problemas cuyas soluciones son:
Páginas 184-187.

22) a) |; |; b) |; [3,+4); c) |; $[\sqrt{2},+\infty)$; d) (-4, 5]; [0, +4); e) [-3/2,+4); [0, +4); f) [3/4, +4); [0, +4).
23) En clase.
24) a) |; b) | - {2}; c) | - {-1, 1}; d) | - {2}; e) | - {-4}; f) | - {-4, -1}.
26) a) | - {5/2, -2}; b) | - {-4, 0, 1}; c) | - {1, 4}; d) (7, +4).
27) Creciente, decreciente y constante.
28) Tiene un mínimo absoluto en el origen.
29) Clase.
30) Clase.
31) a) Impar; b) par; c) y d) no tienen simetría.
32) a) T = 2; b) no hacer; c) P. ej. 0 y -1 (hay infinitas cotas).
39) 36, 309, 9, 7, 23/16.
40) En clase.
41) a) -2; b) 0; c) no se puede calcular.
42) a) -4 y -5 para f(x), 5/3 y 7/3 para g(x); b) -9/2 para f(x), 2 para g(x); c) no existen.
43) Sí.
46) Mínimo en -3 y máximo en 4.
47) En clase.
48) No, porque quizás no existe f(0).
49) a) falso, es par; b) falso; c) verdadero; d) verdadero.
53) En clase.
54) En clase
55) $B(x) = -x^2 + 450x+15$.
62) a) |; b) | - {-1/2, 1/2}; c) | - {0, -5/7}; d) [3, +4); e) (-4, 3]; f) |.
63) Decreciente y creciente.
64) a) Periódica y acotada; b) no periódica y acotada superiormente.
65) a) No simétrica; b) par; c) par; d) impar.
68) -36, 0 , 12.
69) Hacer.
70) a)) (-4, -4] U [2, +4); b)) (-4, -3] U [-1, +4); c) [-2, 5]; d) [-4, 1] U [2, +4); e) | - {-3, 3}; f)) (-4, -1] U [1, +4).
72) Hacer. Mínimos en -2 y 2, máximo en 0.
75) a) y b) No simétrica; c) impar; d) par.
78) Hacer. Las dos están acotadas.

B. Ejercicios dominios y repaso 3º ESO

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

1. Dada la función $f(x) = 3x - 1$, se pide calcular las imágenes de $x = 3$; $x = 3{,}2$; $x = -1{,}5$; $x = \frac{5}{3}$; $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $x = 20$

2. A un valor fijo x = a del dominio de una función, ¿cuántos valores le puede hacer corresponder la función?

3. Dada la función $f(x) = x^2 + 1$, calcula: $f(4); f(a+1); f(\sqrt{2});\ f(a) + 1; [f(a)]^2$

4. Dada la función $f(x) = \frac{3}{5}x - \frac{2}{3}$, calcula x para el cual $f(x) = \frac{1}{5}$.

5. Expresa mediante una expresión algebraica las siguientes funciones:
   a) a cada número le hacemos corresponder su doble.
   b) a cada número le hacemos corresponder el cuadrado de su mitad.
   c) a cada número le hacemos corresponder la suma de su cuadrado con uno.
   d) a cada número le hacemos corresponder el cuadrado de su diferencia con dos.
   Indica de que tipo es cada función.

6. Halla el dominio de definición y el recorrido de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ c) $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - 8x$
   d) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 5x + 4}$ e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ f) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$
   g) $f(x) = \sqrt{x^3 - 9x}$ h) $f(x) = \sqrt{\frac{25}{x^2} - 1}$ i) $f(x) = \sqrt[3]{x+8}$

7. Halla el dominio de definición y el rango de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{x+1} - 5}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 3x + 1}$ c) $f(x) = \sqrt{\frac{x+7}{x-10}}$
   d) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - 6x}$ e) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}}{x^2 - 16}$

8. Halla el dominio de definición y el rango de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}{x - 5}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
   d) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x^2 - 9}}$ e) $f(x) = Ln(4 - x^2)$ f) $f(x) = Ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

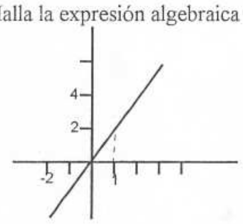
9. Representa gráficamente las siguientes funciones:

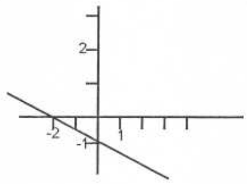
   a) $y = 2x + 4$ b) $y = -3x - 7$ c) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ e) $y = 6x$

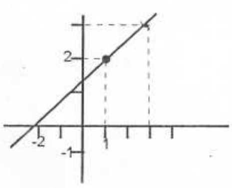
10. Representa gráficamente las funciones:

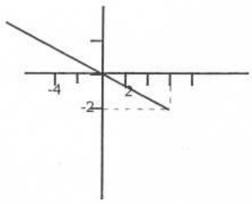
    a) $f(x) = x^2 - x$ b) $f(x) = -2x^2 + x$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 3$

11. Halla la expresión algebraica de las siguientes funciones:

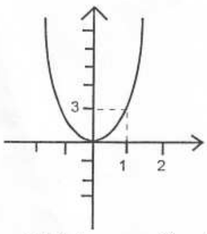


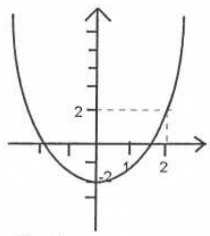




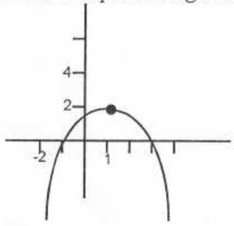


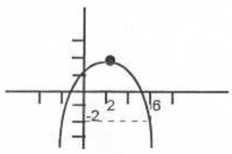
12. Escribe la función correspondiente a cada gráfica:

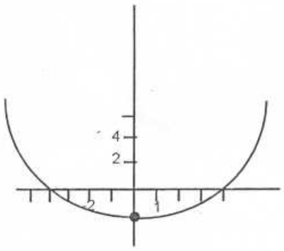


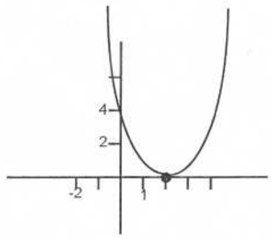


13. Halla la expresión algebraica de las siguientes funciones:









14. Representa las siguientes funciones dadas por intervalos:

a) $f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad x\leq -1 \\ -x & si\, -1 < x\leq 1 \\ 3x-4 & si \quad x>1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<-2 \\ 2x-1 & si\, -2\leq x<3 \\ 2-x & si \quad x>3 \end{cases}$

15. Representa las siguientes funciones:

A) $y=\begin{cases} 3x-5 & si\; x<3 \\ -x^2+1 & si\; x\geq 3 \end{cases}$

B) $f(x)=\begin{cases} -2 & \text{si } x<-1 \\ 2x-1 & \text{si } -1\leq x<2 \\ x^2-3 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

16. Representa las siguientes funciones:

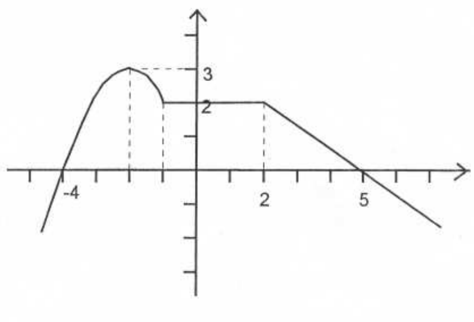
a) $f(x)=\begin{cases} x+4 & six\in(-3,-1) \\ -2x+1 & six\in(-1,1) \\ -2 & six\in[1,4] \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & si\, -3\leq x<3 \\ 2-x & six\geq 3 \end{cases}$

17. Dada la función representada en la gráfica:

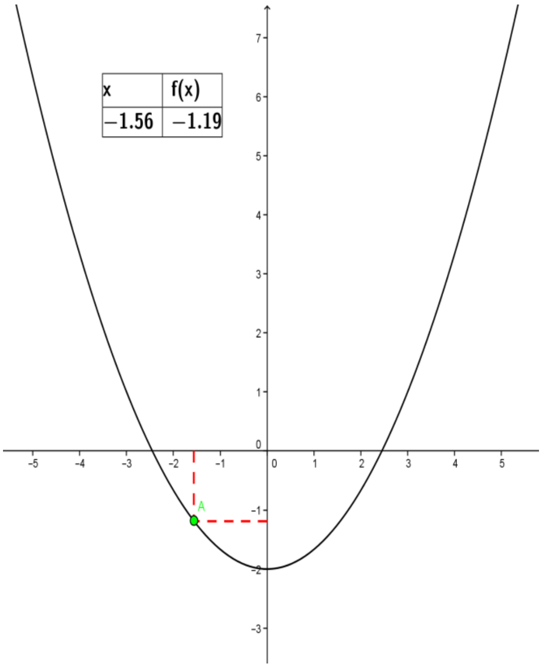
a) halla f(-4), f(1), f(5)

b) ¿para qué conjunto de valores de x la función es positiva?

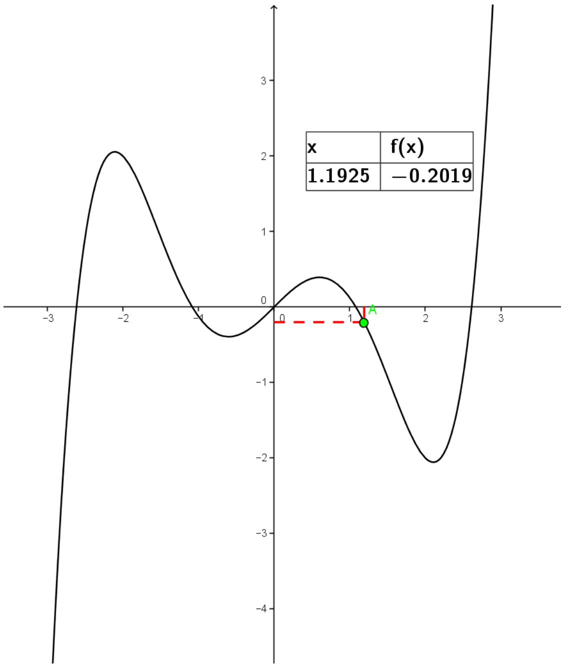


C. Actividad Adicional Simetrías y Periodicidad

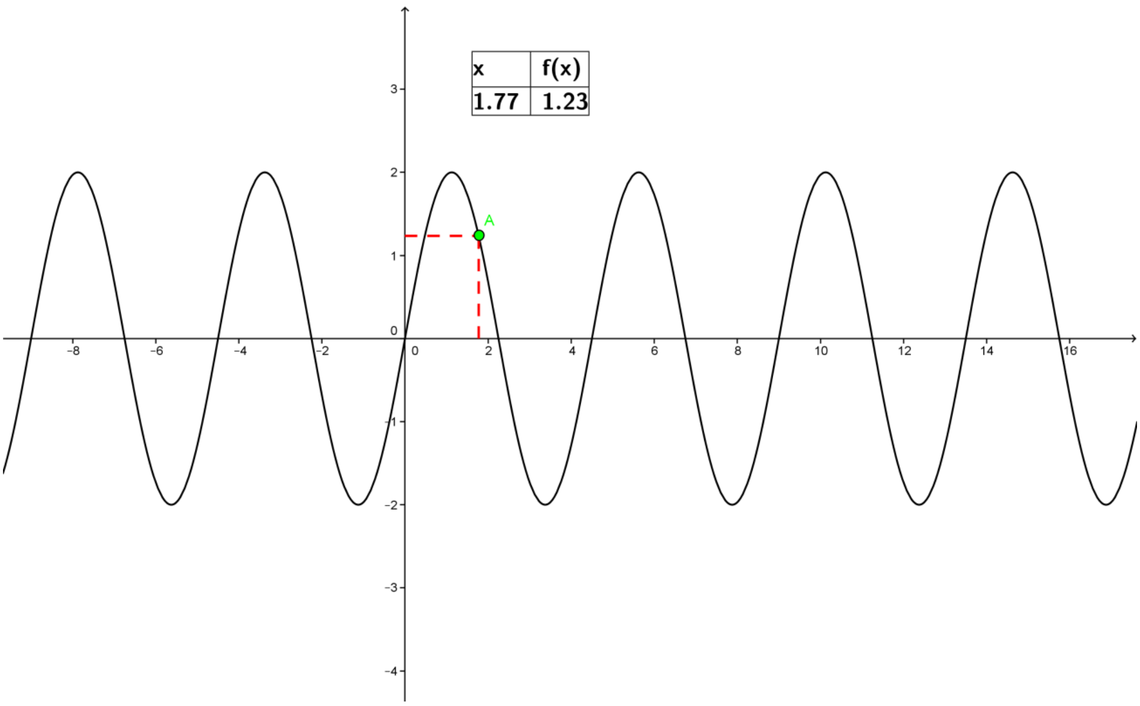
Archivos GGB:



Función Par



Función Impar



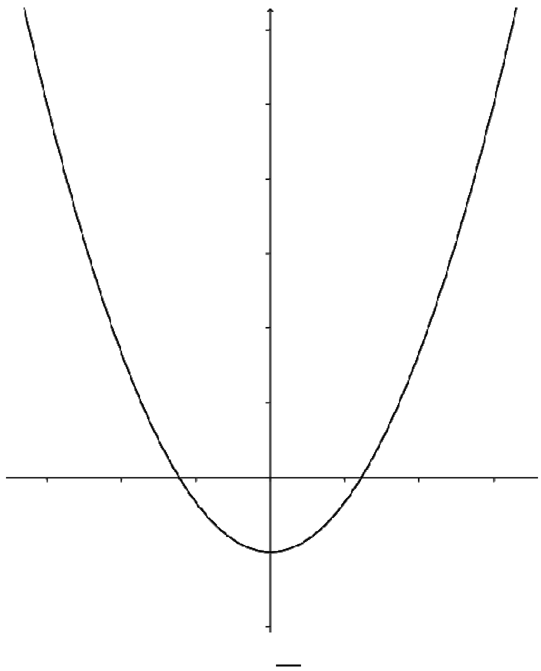
Función Periódica

Fichas:

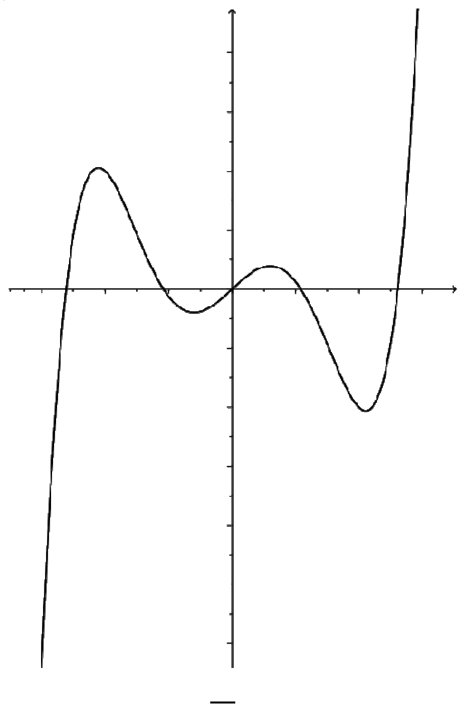
Nombres:

1- Rellena las siguientes tablas:

   a. Abre el fichero **Parabola.html** y realiza los ejercicios:

<table>
<tr><th>Puntos</th><th>Gráfica</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>-1</td><td></td></tr>
<tr><td>1,2</td><td></td></tr>
<tr><td>-1,2</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>-2</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>-4</td><td></td></tr>
<tr><td>4,5</td><td></td></tr>
<tr><td>-4,5</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>Acorde a la gráfica y a los valores de la tabla dibuja la escala de los ejes:
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pregunta: A partir de la tabla y de la representación gráfica, ¿observas alguna propiedad especial de la función?</td></tr>
</table>

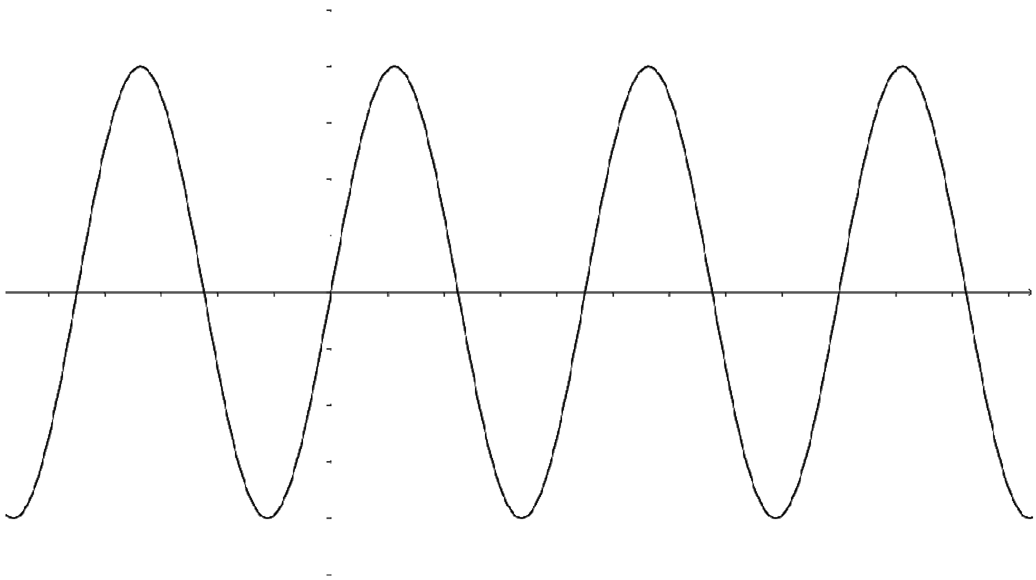
b. Abre el fichero **Polinomio.html** y realiza los ejercicios:

<table>
<tr><th>Puntos</th><th>Gráfica</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>0,5</td><td></td></tr>
<tr><td>-0,5</td><td></td></tr>
<tr><td>1,5</td><td></td></tr>
<tr><td>-1,5</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>-2</td><td></td></tr>
<tr><td>2,5</td><td></td></tr>
<tr><td>-2,5</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>
Acorde a la gráfica y a los valores de la tabla dibuja la escala de los ejes:

</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Pregunta: A partir de la tabla y de la representación gráfica, ¿observas alguna propiedad especial de la función?
</td></tr>
</table>

2- Rellena la siguiente tabla utilizando el fichero **Oscilaciones.html**:

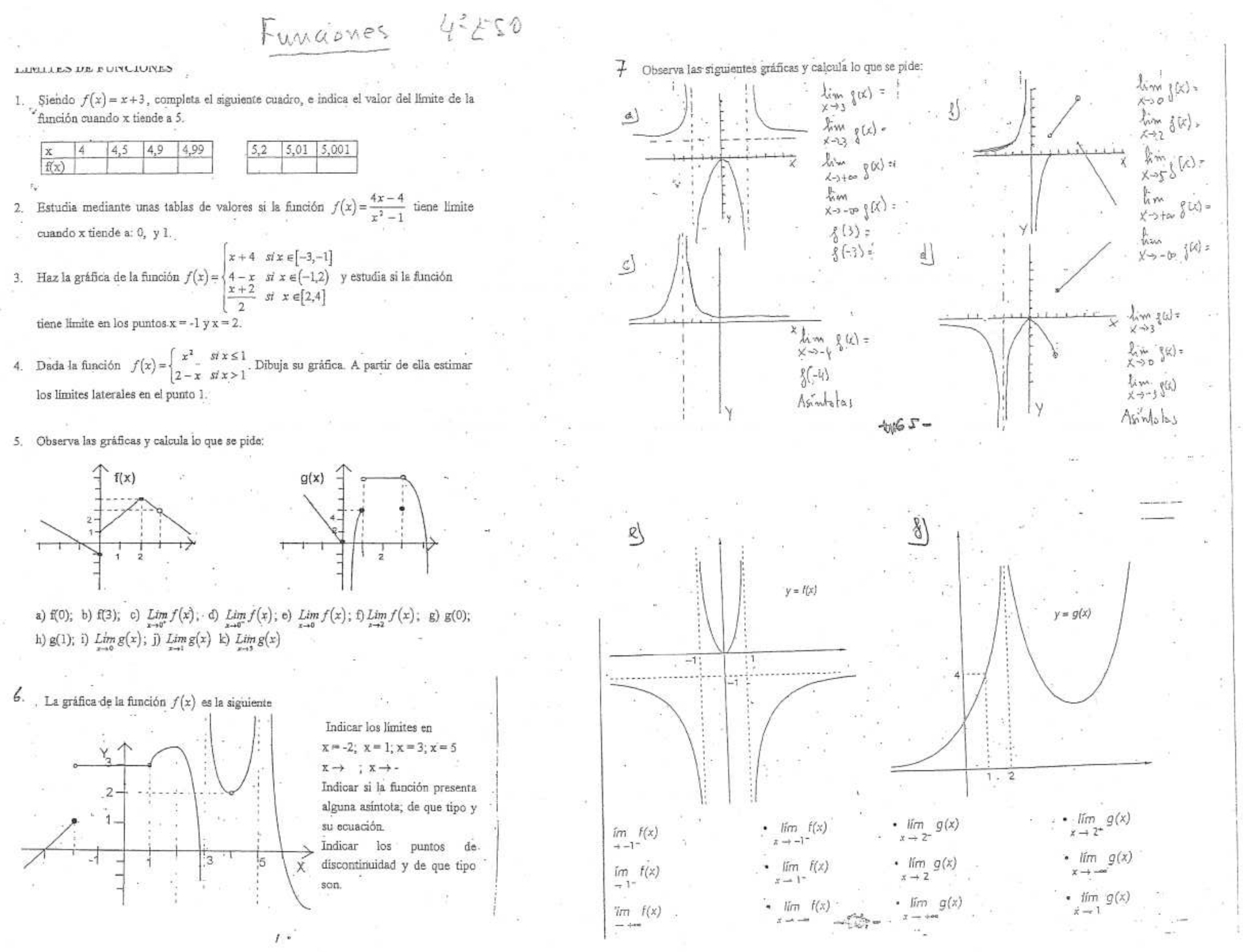
x	-4,5	-3,73	0	0,77	4,5	5,27	9	9,77
f(x)								

Acorde a la gráfica y a los valores de la tabla dibuja la escala de los ejes:



Pregunta: A partir de la tabla y de la representación gráfica, ¿eres capaz de deducir cuánto vale la función en x=18,77? ¿Y para x=49,5? ¿Qué le ocurre a la función?

D. Hojas límites gráficos



Funciones 4º ESO

LIMITES DE FUNCIONES

1. Siendo $f(x)=x+3$, completa el siguiente cuadro, e indica el valor del límite de la función cuando x tiende a 5.

x	4	4,5	4,9	4,99
f(x)				

5,2	5,01	5,001

2. Estudia mediante unas tablas de valores si la función $f(x)=\frac{4x-4}{x^2-1}$ tiene límite cuando x tiende a: 0, y 1.

3. Haz la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} x+4 & si\ x\in[-3,-1] \\ 4-x & si\ x\in(-1,2) \\ \frac{x+2}{2} & si\ x\in[2,4] \end{cases}$ y estudia si la función tiene límite en los puntos x = -1 y x = 2.

4. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x\le 1 \\ 2-x & si\ x>1 \end{cases}$. Dibuja su gráfica. A partir de ella estimar los límites laterales en el punto 1.

5. Observa las gráficas y calcula lo que se pide:

a) f(0); b) f(3); c) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$; d) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; e) $\lim_{x\to 0} f(x)$; f) $\lim_{x\to 2} f(x)$; g) g(0); h) g(1); i) $\lim_{x\to 0} g(x)$; j) $\lim_{x\to 1} g(x)$ k) $\lim_{x\to 3} g(x)$

6. La gráfica de la función $f(x)$ es la siguiente

Indicar los límites en x = -2; x = 1; x = 3; x = 5
x → ; x → -
Indicar si la función presenta alguna asíntota; de que tipo y su ecuación.
Indicar los puntos de discontinuidad y de que tipo son.

7 Observa las siguientes gráficas y calcula lo que se pide:

a)
$\lim_{x\to 3} g(x) =$
$\lim_{x\to -3} g(x) =$
$\lim_{x\to +\infty} g(x) =$
$\lim_{x\to -\infty} g(x) =$
$g(3) =$
$g(-3) =$

b)
$\lim_{x\to 0} g(x) =$
$\lim_{x\to 2} g(x) =$
$\lim_{x\to 5} g(x) =$
$\lim_{x\to +\infty} g(x) =$
$\lim_{x\to -\infty} g(x) =$

c)
$\lim_{x\to -4} g(x) =$
$g(-4)$
Asíntotas

d)
$\lim_{x\to 3} g(x) =$
$\lim_{x\to 0} g(x) =$
$\lim_{x\to -3} g(x)$
Asíntotas

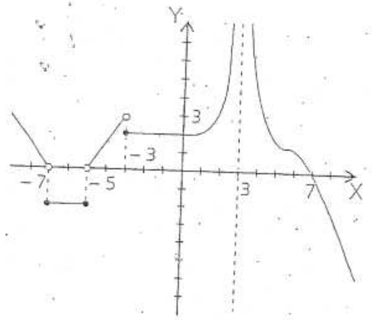
e)

$\lim_{x\to -1^-} f(x)$
$\lim_{x\to 1^-} f(x)$
$\lim_{x\to -\infty} f(x)$
• $\lim_{x\to -1^-} f(x)$
• $\lim_{x\to 1^-} f(x)$
• $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

f)

• $\lim_{x\to 2^-} g(x)$
• $\lim_{x\to 2} g(x)$
• $\lim_{x\to +\infty} g(x)$
• $\lim_{x\to 2^+} g(x)$
• $\lim_{x\to -\infty} g(x)$
• $\lim_{x\to 1} g(x)$

10. Dada la siguiente gráfica, responde:



$f(-7) =$

$f(-3) =$

$f(0) =$

$f(3) =$

$f(7) =$

$\lim_{x \to -5} f(x) =$

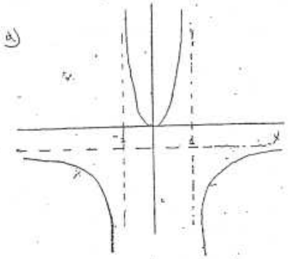
$\lim_{x \to -3^-} f(x) =$

$\lim_{x \to -3^+} f(x) =$

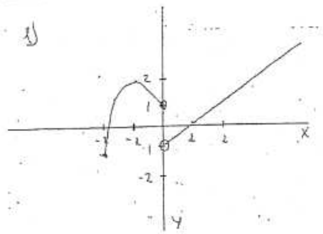
$\lim_{x \to -3} f(x) =$ $\lim_{x \to 3} f(x) =$ $\lim_{x \to \infty} f(x) =$ $\lim_{x \to 5} f(x) =$

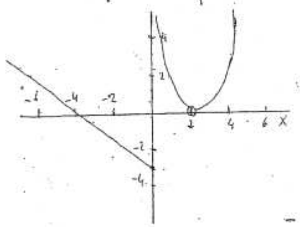
11. Dadas las siguientes funciones calcula en ellas todas sus propiedades.

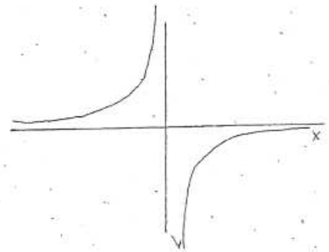
a)



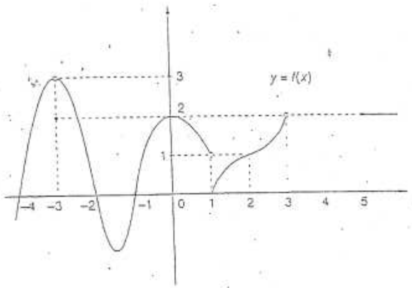
b)

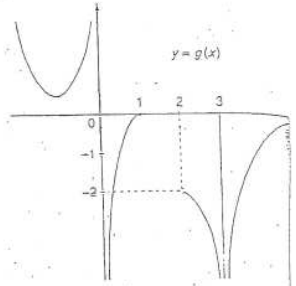






8. Determina, en las siguientes funciones, los datos pedidos:

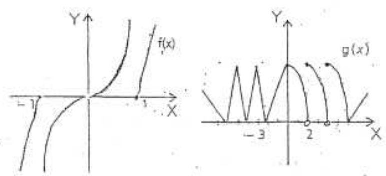




- $f(-3)$ • $f(-2)$ • $f(0)$ • $f(4)$
- $\lim_{x \to -3} f(x)$ • $\lim_{x \to 0} f(x)$ • $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ • $\lim_{x \to 3} f(x)$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ • $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ • $\lim_{x \to 1} f(x)$ • $\lim_{x \to 2} f(x)$

- $\lim_{x \to 3} g(x)$ • $\lim_{x \to 2^-} g(x)$
- $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ • $\lim_{x \to -\infty} g(x)$
- $\lim_{x \to 0^-} g(x)$ • $\lim_{x \to 0^-} g(x)$
- $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ • $\lim_{x \to 2} g(x)$

9. Observa las siguientes gráficas de funciones y calcula los límites que se indican.



a) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ e) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ i) $\lim_{x \to -3} g(x)$

b) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ f) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ j) $\lim_{x \to 2} g(x)$

c) $\lim_{x \to -1} f(x)$ g) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ k) $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

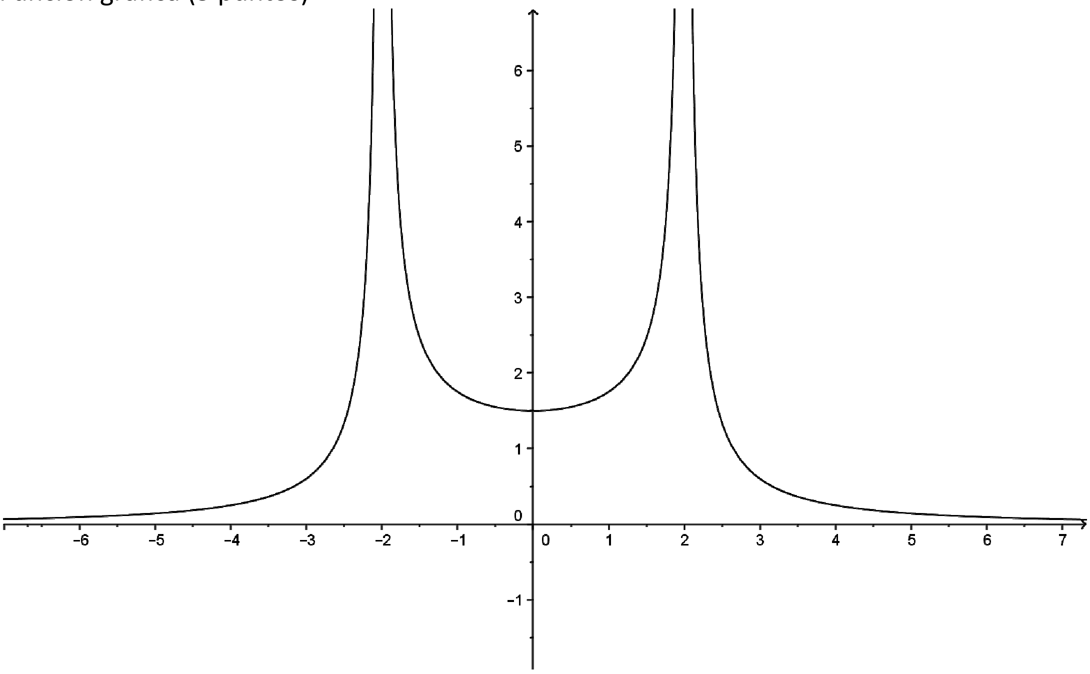
d) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ h) $\lim_{x \to 0} f(x)$ l) $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

E. Examen

Examen funciones 4º ESO

Nombre y Apellido: **19/4/2013**

1. Halla el dominio de las siguientes funciones: (1,5 puntos)
   a)
   b)
   c)
2. Función gráfica (3 puntos)



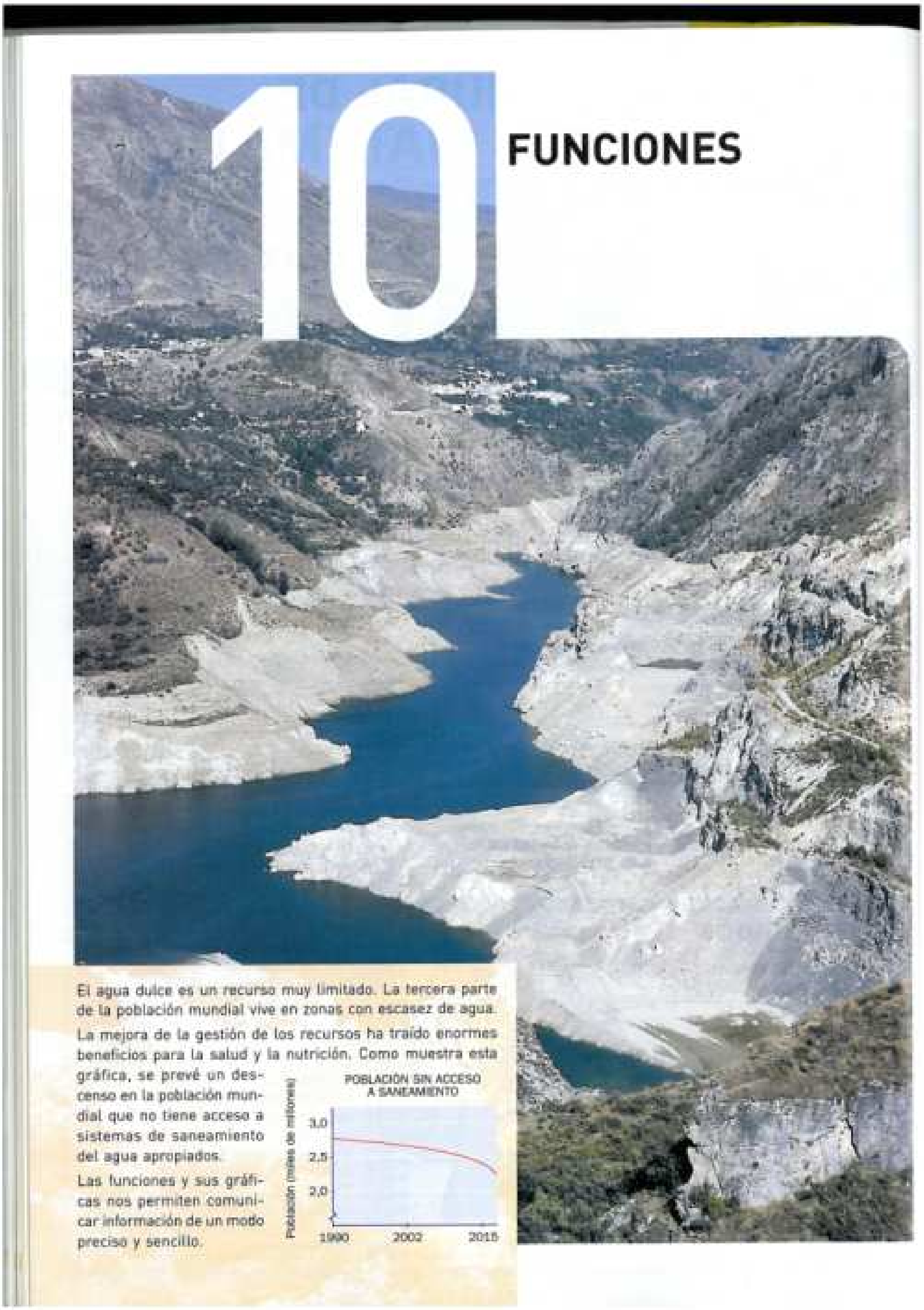
   a) Crecimiento y decrecimiento. (0,5 puntos)
   b) Máximos y mínimos relativos y absolutos. (0,5 puntos)
   c) ¿La función presenta algún tipo de acotación? En caso afirmativo, ¿de qué tipo? Indica la cota. (0,5 puntos)
   d) ¿La función es simétrica? Define función par e impar. (0,5 puntos ver que la función es simétrica, 0,5 puntos definición de función par y 0,5 puntos definición función impar).
3. Demuestra si hay algún tipo de simetría: (1,5 puntos)
   a) $f(x)=x^3-8x$
   b) $f(x)=5\,x^2-x$
   c) f(x)
4. Dibuja la siguiente función: (2 puntos)

5. Dibuja la siguiente función: (2 puntos)

F. Control de tareas por parejas

	24-4	26-4	(29-4 — 30-4)
PAREJA 1	2	8	NO problema
PAREJA 2	5	7	NO problema
PAREJA 3	3	6	NO problema
PAREJA 4	4	9	NO problema
PAREJA 5	4	7	NO problema
PAREJA 6	5	8	NO problema
PAREJA 7	2	8	NO problema
PAREJA 8	4	9	NO problema
PAREJA 9	5	7	NO problema

ANEXO II



10 FUNCIONES

El agua dulce es un recurso muy limitado. La tercera parte de la población mundial vive en zonas con escasez de agua.

La mejora de la gestión de los recursos ha traído enormes beneficios para la salud y la nutrición. Como muestra esta gráfica, se prevé un descenso en la población mundial que no tiene acceso a sistemas de saneamiento del agua apropiados.

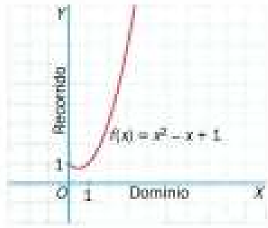
Las funciones y sus gráficas nos permiten comunicar información de un modo preciso y sencillo.

1. Concepto de función

Ejemplo. *El coste anual, en miles de euros, del mantenimiento de una potabilizadora en función de los años que lleve operativa viene dado por la relación* $f(x) = x^2 - x + 1$. *Halla el dominio y el recorrido de esta función.*

Este es un ejemplo de **función**. La variable **independiente** x es el número de años, la variable **dependiente** y o $f(x)$ es el coste en miles de euros, el **dominio** de la función es el subconjunto de los números reales $[0, +\infty)$, y la **imagen** o **recorrido** es $[0{,}75, +\infty)$.

x	$f(x) = x^2 - x + 1$
0	1
1	1
2	3
3	7
4	13
...	...



Una función puede venir dada por un enunciado, por una fórmula (como $f(x) = x^2 - x + 1$), por una tabla o por una gráfica, como acabamos de ver.

Función real de variable real, f. Es una correspondencia que asocia a cada elemento, de un determinado conjunto de números reales, un único número real que se designa $y = f(x)$.

Variable independiente, x. Es la variable cuyo valor se fija previamente.

Variable dependiente, y. Es aquella cuyo valor se deduce del de la variable independiente.

Dominio de la función. Es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente (**originales**). Se representa por $D(f)$.

Recorrido o imagen. Es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente (**imágenes**). Se representa por $R(f)$ o $Im(f)$.

EJERCICIO RESUELTO

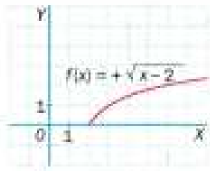
1. Halla el dominio y el recorrido de cada una de estas funciones.

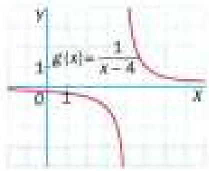
a) $f(x) = +\sqrt{x - 2}$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x - 4}$

a) Esta función solo tiene sentido cuando el radicando es positivo o nulo; es decir, $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. Por tanto, $D(f) = [2, +\infty)$. Las imágenes de esta función son solo números reales positivos, luego $Im(f) = [0, +\infty)$.

b) Esta función está definida para cualquier valor real excepto para los que anulan al denominador; es decir, $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$. Por tanto, $D(g) = \mathbf{R} - \{4\}$.

Las imágenes de esta función pueden ser cualquier número real excepto el 0, ya que una fracción solo puede ser 0 si el numerador se anula, lo que no es posible en este caso.





EJERCICIOS PROPUESTOS

1 Halla el dominio y el recorrido de estas funciones.

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $g(x) = |x|$

c) $h(x) = x^3$

2 Calcula el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 1}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$

c) $h(x) = \dfrac{2x + 3}{x(x^2 + 1)}$

d) $j(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

Tasa de variación

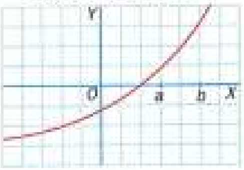
Ejemplo. *¿Cómo varía la función $f(x) = x^2 + 1$ cuando la variable x pasa de 1 a 1,2; es decir, cuando su valor se incrementa en dos décimas?*

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2 \qquad f(1,2) = 1,2^2 + 1 = 2,44$$

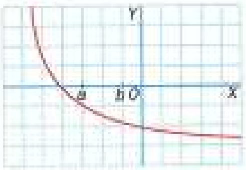
Observamos que si x pasa de 1 a 1,2, $f(x)$ lo hace de 2 a 2,44. La diferencia $f(1,2) - f(1) = 2,44 - 2 = 0,44$ se llama **tasa de variación** de $f(x)$ en el intervalo [1; 1,2], y se representa así: $TV[1; 1,2]$.

La **tasa de variación** de la función f al pasar del punto a al punto b viene dada por esta expresión: $TV[a, b] = f(b) - f(a)$.

FUNCIÓN CRECIENTE



FUNCIÓN DECRECIENTE



Crecimiento y decrecimiento

La función $f(x) = x^2 + 1$ crece en el intervalo [1; 1,2]. ¿Cómo podemos comprobar esto? Observa que, por ejemplo, $f(1) = 2$ y $f(1,2) = 2,44$. Entonces:

$$f(1) < f(1,2); \text{ o bien } f(1,2) - f(1) > 0 \Rightarrow TV[1; 1,2] > 0$$

Si esto se verifica para cualquier par de valores dentro del intervalo, podremos decir que la **función** es **creciente** en el mismo.

De igual modo se puede caracterizar el decrecimiento.

Una función es **creciente** en un intervalo si para cualquier par de valores en el mismo, a y b, con $a < b$, la **tasa de variación es positiva**.

Una función es **decreciente** en un intervalo si para cualquier par de valores en el mismo, a y b, con $a < b$, la **tasa de variación es negativa**.

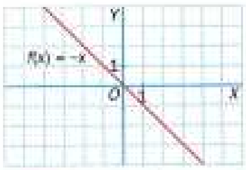
EJERCICIO RESUELTO

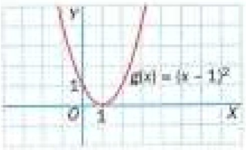
2. Calcula la tasa de variación y estudia el crecimiento o decrecimiento de las siguientes funciones en el intervalo [2; 2,1].

a) $f(x) = -x$ b) $g(x) = (x - 1)^2$

a) $TV[2; 2,1] = f(2,1) - f(2) = -2,1 + 2 = -0,1 < 0$. Como se trata de una recta, la tasa de variación será negativa para cualquier par de valores dentro del intervalo. Por tanto, la función es decreciente en [2; 2,1].

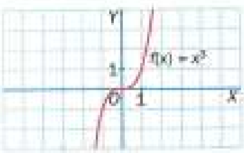
b) $TV[2; 2,1] = g(2,1) - g(2) = (2,1 - 1)^2 - (2 - 1)^2 = 1,21 - 1 = 0,21 > 0$
Al ser la función cuadrática, su gráfica es una parábola y la tasa de variación en un intervalo es de signo constante, excepto si contiene al vértice de la parábola. Como el vértice está en $x = 1$, no está incluido en [2; 2,1], por lo que la tasa de variación es positiva para cualquier par de valores en dicho intervalo y la función es creciente en él.



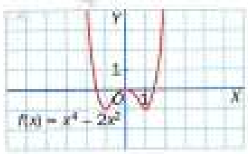


EJERCICIOS PROPUESTOS

3 Estudia el crecimiento o decrecimiento de la función $f(x) = x^3$.

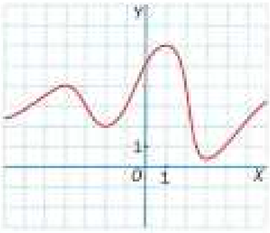


4 Indica en qué intervalos es creciente o decreciente la función $y = x^4 - 2x^2$



3. Máximos y mínimos absolutos y relativos

Observa la función cuya gráfica se representa a la derecha.



La ordenada en $x = -4$ es mayor que en todos los puntos próximos por ambos lados; por eso se dice que la función tiene un **máximo relativo** en $x = -4$.

La ordenada en $x = -2$ es menor que en todos los puntos próximos por ambos lados; por eso se dice que la función tiene un **mínimo relativo** en $x = -2$.

Del mismo modo, la función en $x = 1$ tiene un máximo relativo; pero en esta ocasión, como el valor de la ordenada es mayor que en cualquier otro punto del dominio, se dice que la función tiene un **máximo absoluto** en $x = 1$.

En $x = 3$, la función tiene un mínimo relativo; pero como el valor de la ordenada es menor que en cualquier otro punto del dominio, se dice que la función tiene un **mínimo absoluto** en $x = 3$.

Una función f tiene un **máximo relativo** en $x = a$ si existe un entorno del punto a en el que los valores que toma la función son menores o iguales a $f(a)$.

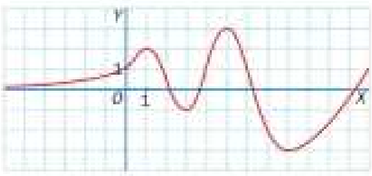
Una función f tiene un **mínimo relativo** en $x = a$ si existe un entorno del punto a en el que los valores que toma la función son mayores o iguales a $f(a)$.

Una función f tiene un **máximo absoluto** en $x = a$ si $f(a)$ es mayor o igual que el valor de $f(x)$ en cualquier otro punto del dominio de la función.

Una función f tiene un **mínimo absoluto** en $x = a$ si $f(a)$ es menor o igual que el valor de $f(x)$ en cualquier otro punto del dominio de la función.

EJERCICIO RESUELTO

3. Indica los máximos y mínimos absolutos y relativos de la siguiente función.



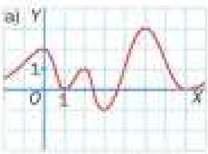
La función tiene un máximo relativo en $x = 1$ y un máximo absoluto en $x = 5$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 3$ y un mínimo absoluto en $x = 8$.

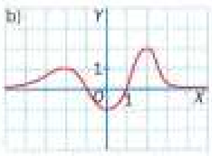
EJERCICIOS PROPUESTOS

5 Señala los máximos y mínimos de estas funciones.

a)



b)



6 Indica los máximos y mínimos de estas funciones.

a) $y = 3x + 2$

b) $y = |x|$

c) $y = (x - 2)^2 + 3$

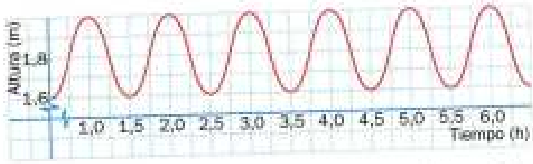
d) $y = x^2 - 4$

4. Funciones periódicas y acotadas

Ten en cuenta

Es mucho más fácil representar la gráfica de una función si sabemos que es periódica, ya que, una vez que es representada en un periodo, el resto de la gráfica se obtiene trasladando esa parte.

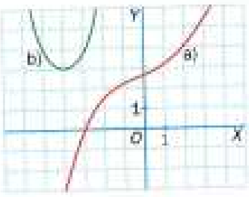
Ejemplo. *Observa el extremo de la aguja minutera de un reloj de pared. Cada hora, los valores de su altura en relación con el suelo se repiten respecto a la hora anterior. La gráfica altura-tiempo es de esta forma.*

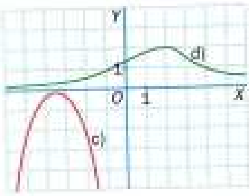


Los valores que toma esta función se repiten cada hora. Este tiempo que tarda en repetirse se denomina **periodo**, y las funciones que tienen este comportamiento, **funciones periódicas**.

Una función f es **periódica** de periodo T si, para todos los puntos del dominio, se verifica que:

$$f(x + T) = f(x)$$





Ejemplo. *Observa las cuatro funciones cuyas gráficas ves en el margen.*

a) La función toma valores mayores que cualquier número real y otros menores que cualquier número real. Se dice que la función ***no está acotada****.*

b) Todos los valores que toma la función son mayores o iguales que 3; por tanto, se dice que la ***función está acotada inferiormente****.*

c) Todos los valores que toma la función son menores o iguales que 0; entonces, se dice que la función ***está acotada superiormente****.*

d) La función está acotada inferiormente por 0 o cualquier número menor, y superiormente por 2 o cualquier número mayor; por consiguiente, se dice que ***está acotada****.*

Una función f está **acotada inferiormente** si existe un número real k tal que para todo x es $f(x) \geq k$. El número k se llama **cota inferior**.

Una función f está **acotada superiormente** si existe un número real k' tal que para todo x es $f(x) \leq k'$. El número k' se llama **cota superior**.

Una función f está **acotada** si lo está superior e inferiormente.

Ejercicios propuestos

7 Indica si es periódica la siguiente función. En caso afirmativo, calcula su periodo.

8 Estudia si están acotadas y qué tipo de acotación presentan las siguientes funciones.

a) $y = 5$ b) $y = x^2 - 3$

9 Comprueba si están acotadas y qué tipo de acotación presentan las siguientes funciones.

a) $y = \frac{1}{x^2}$ b) $y = -|x + 3|$

10 La función $f(x)$ asocia a cada número real su parte decimal. Por ejemplo: $f(2,6) = 0,6$; $f(-4,2) = 0,2$.

a) Dibuja su gráfica.

b) ¿Es periódica? En caso afirmativo, indica su periodo.

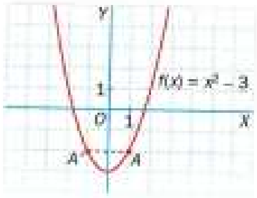
c) ¿Está acotada?

5. Funciones simétricas

Simetría respecto del eje de ordenadas. Funciones pares

Ejemplo. *En la función $f(x) = x^2 - 3$ se observa que:*

- $f(-1) = f(1) = -2 \Rightarrow A(1, -2)$ *y* $A'(-1, -2)$ *son simétricos respecto del eje de ordenadas.*
- $f(-2) = f(2) = 1 \Rightarrow C(2, 1)$ *y* $C'(-2, 1)$ *también son simétricos respecto del eje de ordenadas.*



Para cualquier valor de x, $f(-x) = f(x)$ y los puntos $P(x, y)$ y $P'(-x, y)$, son simétricos respecto del eje de ordenadas.

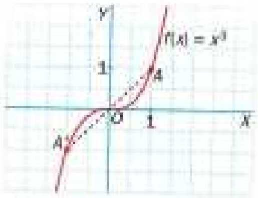
Una función f es **simétrica respecto del eje de ordenadas** cuando para todo x del dominio se verifica que $f(-x) = f(x)$.

Estas funciones también se llaman **funciones pares**.

Simetría respecto del origen. Funciones impares

Ejemplo. *En la función $f(x) = x^3$ se observa que:*

- $f(-1) = -f(1) = -1 \Rightarrow A(1, 1)$ *y* $A'(-1, -1)$ *son simétricos respecto del origen.*
- $f(-2) = -f(2) = -8 \Rightarrow B(2, 8)$ *y* $B'(-2, -8)$ *también son simétricos respecto del origen.*
- $f(-3) = -f(3) = -27 \Rightarrow C(3, 27)$ *y* $C'(-3, -27)$, *igualmente, son simétricos respecto del origen.*



Para cualquier valor de x, $f(-x) = -f(x)$ y los puntos $P(x, y)$ y $P'(-x, -y)$, son simétricos respecto del origen.

Una función f es **simétrica respecto del origen** cuando para todo x del dominio se verifica que $f(-x) = -f(x)$.

Estas funciones también se llaman **funciones impares**.

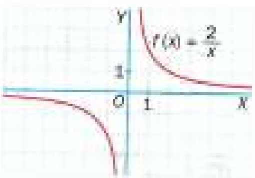
EJERCICIO RESUELTO

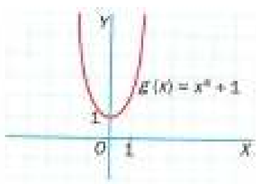
4. Estudia la simetría de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ b) $g(x) = x^4 + 1$

a) $f(-x) = \dfrac{2}{-x} = -\dfrac{2}{x} = -f(x) \Rightarrow f(x)$ es simétrica respecto del origen.

b) $f(-x) = (-x)^4 + 1 = f(x) \Rightarrow f(x)$ es simétrica respecto del eje OY.





EJERCICIOS PROPUESTOS

11 ¿Presentan algún tipo de simetría estas funciones?
a) $y = 3x$ b) $y = 3x + 2$ c) $y = 5x^2 + 3$

12 Estudia la simetría de las siguientes funciones.
a) $y = |x|$ b) $y = -3x^2 + 1$ c) $y = -2x^3 + 2$

6. Operaciones con funciones

Producto de una función por un número real

Ejemplo. *En una práctica de Biología y Geología han encontrado que el número de gusanos de seda que ha criado cada grupo de trabajo sigue esta función.*

$$f(x) = x^2 + 1$$

Donde x es el número de semanas.

x	$f(x)$	$g(x)$
...	...	...
0	1	5
1	2	10
2	5	25
3	10	50
4	17	85
5	26	130
...	...	...

Si en la clase hay 5 grupos, el número de gusanos que hay en total al final de cada semana será el que aparece en la tercera columna de la tabla.

Estos valores corresponden a la función $g = 5 \cdot f$, que asocia directamente los valores de la tercera columna con los de la primera.

El **producto de un número real k por una función f** es una función kf que asocia, a cada x, k veces el valor de $f(x)$.

$$(kf)(x) = k \cdot f(x)$$

Suma y diferencia de funciones

Ten en cuenta

Las funciones que son el resultado de operaciones entre otras funciones solo están definidas en los puntos comunes a todos los dominios de las funciones de partida.

Ejemplo. *Observa la tabla de valores para estas funciones.*

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = 3x$$

Los valores de la cuarta columna se obtienen sumando los valores de f(x) y g(x) para cada x del dominio.

Corresponden a la función suma $(f + g)$, que asocia a los valores de la primera columna los de la cuarta.

x	$f(x)$	$g(x)$	$(f+g)(x)$
...	...	...	...
−3	10	−9	1
−2	5	−6	−1
−1	2	−3	−1
0	1	0	1
1	2	3	5
2	5	6	11
3	10	9	19
...	...	...	...

La suma de dos funciones f y g es otra función $(f + g)$ que a cada x del dominio común de ambas le hace corresponder $f(x)$ más $g(x)$.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

La diferencia de dos funciones f y g es otra función $(f - g)$ que a cada x del dominio común de ambas le hace corresponder $f(x)$ menos $g(x)$.

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

EJERCICIO RESUELTO

5. Dadas las funciones $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ y $g(x) = x^2 + 3x + 1$, halla las siguientes.

a) $(2f)(x)$ b) $(3g)(x)$ c) $(f + g)(x)$

a) $(2f)(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot \frac{2x}{x+3} = \frac{4x}{x+3}$

b) $(3g)(x) = 3 \cdot g(x) = 3(x^2 + 3x + 1) = 3x^2 + 9x + 3$

c) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{2x}{x+3} + x^2 + 3x + 1$

La función f no existe en $x = -3$, por tanto, las funciones $2f$ y $f + g$ tampoco existen en $x = -3$.

Producto y cociente de funciones

Ejemplo. *Observa la tabla de valores para las siguientes funciones.*

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = -x$$

x	$f(x)$	$g(x)$	$(f \cdot g)(x)$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
...	...	...	...	...
−2	5	2	10	2,5
−1	2	1	2	2
0	1	0	0	No está definido
1	2	−1	−2	−2
2	5	−2	−10	−2,5
...	...	...	...	...

Los valores de la cuarta columna son los productos de $f(x)$ por $g(x)$, y corresponden a la función producto $(f \cdot g)(x)$.

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 1)(-x) = -x^3 - x$$

Los valores de la quinta columna son los cocientes de $f(x)$ entre $g(x)$, y corresponden a la función cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{x^2 + 1}{x}$$

El **producto de dos funciones f y g** es otra función $f \cdot g$ que, a cada x del dominio común de ambas, le hace corresponder $f(x)$ por $g(x)$.

$$\mathbf{(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)}$$

El **cociente de dos funciones f y g** es otra función $f : g$ que, a cada x del dominio común de ambas, le hace corresponder $f(x)$ entre $g(x)$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$$

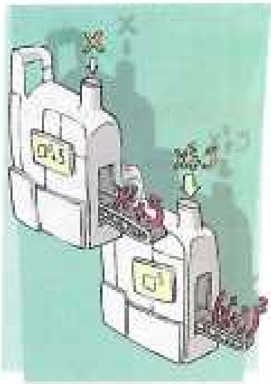
Las funciones $f \cdot g$ y $f : g$ solo están definidas en el dominio común de las funciones f y g. Para la función $f : g$ se deben descartar del dominio común los valores de x que anulan a la función del denominador.

Composición de dos funciones

Ejemplo. *Considera las funciones $f(x) = x^2 + 5$ y $g(x) = x^2$.*

$$x \xrightarrow{f} x^2 + 5 \xrightarrow{g} (x^2 + 5)^2$$

$$g \circ f$$



La función que asocia a cada x el valor $(x^2 + 5)^2$ se llama **función compuesta** de f y g. Se escribe $g \circ f$ y se lee "g compuesto con f".

La **composición de una función f con otra g** es la función $g \circ f$ definida del siguiente modo.

$$\mathbf{(g \circ f)(x) = g[f(x)]}$$

EJERCICIO RESUELTO

6. Halla la expresión de las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$ si $f(x) = x - 5$ y $g(x) = 2x^2 + 1$.

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x - 5) = 2(x - 5)^2 + 1 = 2(x^2 - 10x + 25) + 1 = $$
$$= 2x^2 - 20x + 51$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(2x^2 + 1) = 2x^2 + 1 - 5 = 2x^2 - 4$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

13 Si $f(x) = |x|$, $g(x) = 3x$ y $h(x) = x^2 + 4$, calcula las siguientes funciones.

a) $3f$ b) $f + 2g$ c) $g \cdot h$ d) $\frac{g}{h}$

14 Dadas las funciones $f(x) = 5x^2 + 3$ y $g(x) = x + 7$:

a) Calcula las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$.

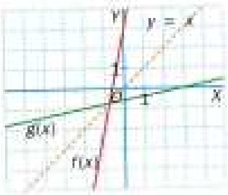
b) ¿Es conmutativa la composición de funciones?

7. Funciones recíprocas

Ejemplo. Si $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x-3}{5}$, calcula $f \circ g$ y $g \circ f$.

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{x-3}{5}\right) = 5\left(\dfrac{x-3}{5}\right) + 3 = x$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(5x+3) = \dfrac{5x+3-3}{5} = x$



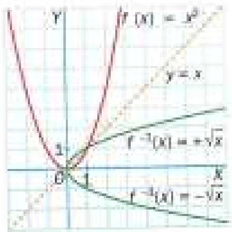
Se observa que las dos funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ asignan a cada valor x el mismo número x. La función que cumple esta propiedad se denomina **función identidad**, $i(x)$.

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x \Rightarrow f \circ g = g \circ f = i$$

Como al componer las funciones f y g obtenemos la función identidad, se dice que son funciones **recíprocas** o **inversas**.

La función recíproca de una función f se representa por f^{-1}.

La función f^{-1} "deshace" la transformación que realiza la función f. Por ejemplo, si f transforma el número 3 en el 18, $f(3) = 18$, la función inversa transforma el 18 en el 3, $f^{-1}(18) = 3$.



Al dibujar sus gráficas en unos mismos ejes, observamos que son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

La recíproca de una función **puede no ser una función**. Esto ocurre cuando asigna dos valores diferentes a un mismo valor de x; por ejemplo, la "función" recíproca de $f(x) = x^2$ sería $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$. Debido al doble signo de la raíz, f^{-1} no es propiamente una función, sino una correspondencia.

Ten en cuenta

Aunque la función recíproca de f se represente como f^{-1}, eso no significa que $f^{-1}(x)$ sea igual a $\dfrac{1}{f(x)}$.

Dos funciones f y g son **recíprocas** si se verifica que $f \circ g = g \circ f = i$, siendo i la **función identidad**.

Si la función f transforma el valor x en $y = f(x)$, la función f^{-1} transforma y en x, $f^{-1}(y) = x$.

Las gráficas de una función f y de su recíproca f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

EJERCICIO RESUELTO

7. Halla la función recíproca de $f(x) = y = 3x - 1$.

Despejamos la variable x en la expresión de y: $y = 3x - 1 \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{3}$

Intercambiamos x e y: $y = \dfrac{x+1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

15 Considera la función $f(x) = y = 2x + 2$.

a) Halla la función recíproca de f.

b) Representa la función f y su recíproca. ¿Cómo son respecto de la recta $y = x$?

16 Dada la función $f(x) = 3x^2 - 5$:

a) Halla la función f^{-1}.

b) Calcula la composición de estas funciones.

$f^{-1} \circ f \qquad f \circ f^{-1}$

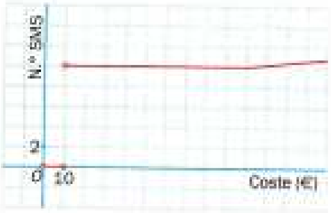
8. Funciones definidas a trozos

Ejemplo. *Una compañía de telefonía propone a los nuevos clientes la siguiente oferta para SMS: los 10 primeros mensajes del mes son gratis, puedes mandar hasta 100 pagando 10 euros y, si envías más de 100, cada uno costaría 10 céntimos.*

Escribe la función que relaciona el número de SMS enviados, x, con su coste total.

$$y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ 10 & \text{si } 10 < x < 100 \\ 0{,}10x & \text{si } 100 \leq x \end{cases}$$

Esta función viene dada por una fórmula distinta para cada una de las partes.



Mientras que algunas funciones están definidas por una única fórmula, otras están definidas aplicando diferentes fórmulas a las distintas partes de su dominio. Estas funciones se dice que están **definidas a trozos**.

Sabías que...

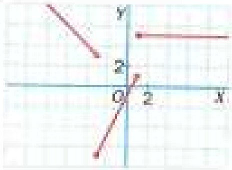
Cuando observamos un objeto sumergido en el agua, lo apreciamos como si estuviera quebrado. Esto se debe a que los rayos de luz que van del objeto al ojo sufren un cambio de dirección cuando atraviesan la frontera agua-aire. La apariencia del objeto sería la gráfica de una función definida a trozos.

EJERCICIOS RESUELTOS

8. Representa la siguiente función: $y = \begin{cases} -x & \text{si } x < -3 \\ 2x - 1 & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ 5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Estas son las fórmulas de cada tramo.

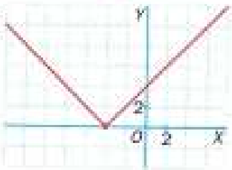
$y = -x$ si $x < -3$
$y = 2x - 1$ si $-3 \leq x < 1$
$y = 5$ si $x \geq 1$



9. Representa la función $f(x) = |x + 4|$.

La función valor absoluto es siempre una función a trozos, ya que tiene una expresión diferente según que la expresión de dentro de las barras sea mayor o menor que 0.

$$f(x) = |x + 4| = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x + 4 > 0 \rightarrow x > -4 \\ -(x + 4) & \text{si } x + 4 \leq 0 \rightarrow x \leq -4 \end{cases}$$



EJERCICIOS PROPUESTOS

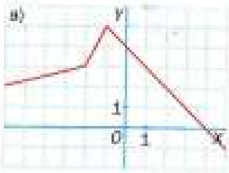
17 Representa estas funciones definidas a trozos.

a) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

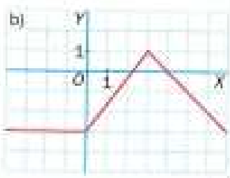
b) $y = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 & \text{si } -2 \leq x < 4 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

18 Observa estas dos representaciones gráficas y escribe las fórmulas de las funciones a las que corresponden.

a)



b)



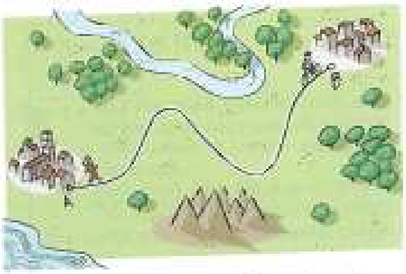
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

CONSTRUYE E INTERPRETA UNA GRÁFICA

Muchos problemas se pueden resolver de varias formas. Una de ellas puede ser representar gráficamente los datos en unos ejes de coordenadas sin tener que recurrir al álgebra.

Problema

Ana sale a pasear por el camino que une su pueblo con el de Beatriz a una velocidad de 6 kilómetros por hora. Al mismo tiempo, Beatriz sale con la bici a recorrerlo en sentido contrario, pero a 12 kilómetros por hora. Si hay 18 kilómetros de trayecto, ¿a qué distancia del pueblo de Ana se cruzarán las dos amigas?



Resolución

Vamos a estudiar gráficamente cómo varía con el tiempo la distancia de cada una de las amigas al pueblo de Ana.

Representamos las gráficas distancia-tiempo correspondientes a Ana y Beatriz

En el eje *OX* representamos el tiempo transcurrido en horas, y en el eje *OY*, la distancia al pueblo de Ana en kilómetros. Observa que en la gráfica de Beatriz se lee "hacia atrás": según aumenta el tiempo (eje *OX*), disminuye su distancia al pueblo de Ana (eje *OY*).

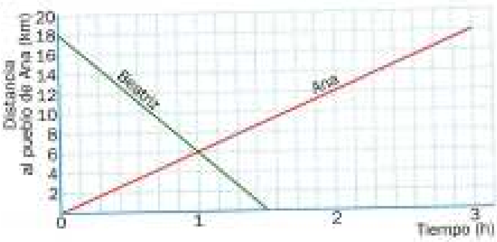
Interpretamos la información que aportan las gráficas

El punto donde se cruzan las dos gráficas indica que, en ese instante, ambas amigas se encuentran a la misma distancia del pueblo de Ana, es decir, se cruzan en el camino.

En la gráfica de la derecha hemos representado el recorrido de ambas chicas. Como las velocidades son constantes, las gráficas son rectas y basta con dar dos valores en cada caso, que pueden ser la posición inicial de cada una ($t = 0$) y la posición cuando ha transcurrido 1 hora ($t = 1$).

A partir de la gráfica, podemos resolver el problema: las dos chicas se cruzaron a 6 kilómetros del pueblo de Ana. Además, aunque no nos lo hayan pedido, hemos obtenido otro dato: han tardado 1 hora en cruzarse.

Puede ocurrir que el punto de corte no se vea tan claramente, en cuyo caso tendremos que representar nuestra gráfica a mayor tamaño o dar un resultado aproximado.



PROBLEMAS PROPUESTOS

19 Un automóvil parte desde Logroño hacia Palencia a 100 km/h. Simultáneamente, otro sale desde Palencia hacia Logroño a 60 km/h.

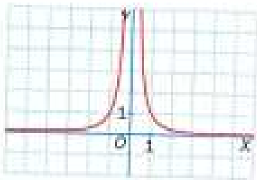
Sabiendo que ambas capitales distan 200 kilómetros, ¿a qué distancia de Logroño se producirá el encuentro?

20 Resuelve de nuevo la situación del ejercicio anterior si la velocidad de cada coche aumentase en 20 km/h.

¿A qué distancia de Logroño se cruzarían en este caso?

CONCEPTO DE FUNCIÓN

- **Función:** correspondencia que asocia a cada original una sola imagen.
- **Variable independiente, x:** se fija previamente.
- **Variable dependiente, y:** se obtiene de la x.
- **Dominio, $D(f)$:** conjunto de valores que puede tomar x.
- **Imagen, $Im(f)$ o $R(f)$:** conjunto de valores que toma $f(x)$.



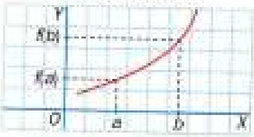
$y=\frac{1}{x^2}$

$D(f)=\mathbf{R}-\{0\}$

$Im(f)=(0,+\infty)$

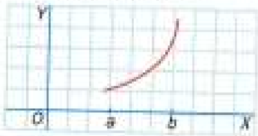
CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Tasa de variación



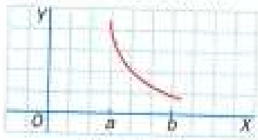
$TV[a,b]=f(b)-f(a)$

Función creciente



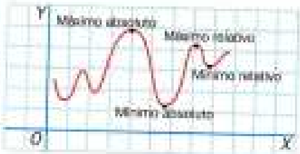
$TV[a,b]>0$

Función decreciente

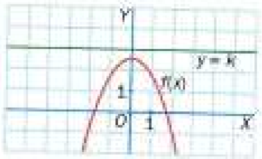


$TV[a,b]<0$

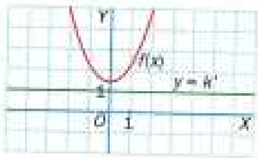
MÁXIMOS Y MÍNIMOS



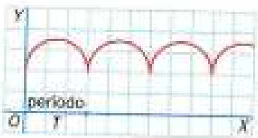
ACOTADA SUPERIORMENTE



ACOTADA INFERIORMENTE



FUNCIÓN PERIÓDICA



$f(x+T)=f(x)$

FUNCIONES SIMÉTRICAS

Respecto del eje OY

$f(-x)=f(x)$ Función par

Respecto del origen

$f(-x)=-f(x)$ Función impar

OPERACIONES CON FUNCIONES

Suma: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

Diferencia: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

Producto por un número k: $(k\cdot f)(x)=k\cdot f(x)$

Producto: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$

Composición: $f(x)=x^2+5$; $g(x)=x^3$

$[g\circ f](x)=g[f(x)]=g(x^2+5)=(x^2+5)^3$

$g\circ f\neq f\circ g$

Función identidad: $i(x)=x$

Función recíproca de f: f^{-1}, tal que

$(f^{-1}\circ f)(x)=i(x)$

Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de $y=x$.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Concepto de función

21 Construye una tabla de 6 valores para estas funciones.

a) $f(x) = 5x + 3$

b) $g(x) = x^2 + 2x$

c) $y = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$

d) $y = \sqrt{10 - x}$

22 Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x - 6$

b) $y = x^2 + 3$

c) $y = \sqrt{x^2 + 2}$

d) $g(x) = \sqrt{15 - 3x}$

e) $h(x) = \sqrt{3 + 2x}$

f) $y = \sqrt{8x - 6}$

23 Dibuja una función que cumpla estas condiciones.

a) Que su dominio sea $\mathbb{R} - \{2\}$, y su recorrido, $\mathbb{R}$.

b) Que su dominio sea $(-\infty, 0]$.

c) Que su dominio sea $[-6, 6]$, y su recorrido, $[0, 12]$.

24 Calcula el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x - x^2}{4x^2 + 6}$

b) $y = \dfrac{1}{x^2 - 8}$

c) $g(x) = \dfrac{x - 2}{3x^2 - 3}$

d) $y = \dfrac{1}{2 - x}$

e) $h(x) = \dfrac{x}{2x + 6}$

f) $y = \dfrac{3x^2 - 6}{x^2 + 5x + 4}$

25 Escribe la fórmula de una función:

a) Cuyo dominio sea $[3, +\infty)$.

b) Cuyo dominio sea $\mathbb{R}$, y su recorrido, $\mathbb{R}^+$.

c) Cuyo dominio sea $[0, +\infty)$, y su recorrido, $\mathbb{R}^+$.

26 Halla el dominio de estas funciones.

a) $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 10}$

b) $y = \dfrac{1 - 5x - x^2}{x^3 + 3x^2 - 4x}$

c) $y = \dfrac{x + 3}{x^2 - 5x + 4}$

d) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x - 7}}$

Características de las funciones

27 Dibuja las funciones $y = x - 3$, $y = 2 - 4x$ e $y = 1$. A la vista de la gráfica, ¿qué tipo de crecimiento presenta cada una de ellas?

28 Teniendo en cuenta su gráfica, estudia la función $y = x^2$ en los intervalos $[0; 0{,}5]$ y $[-0{,}5; 0]$.

a) ¿Es creciente o decreciente?

b) ¿Qué se puede afirmar del punto $(0, 0)$?

29 Para cada una de las funciones representadas a continuación, estudia:

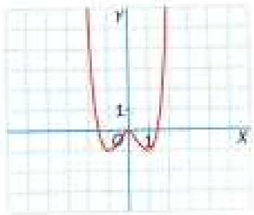
a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Los máximos y mínimos relativos y absolutos.

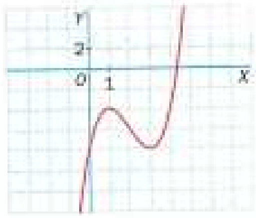
c) La simetría.

d) Si están acotadas y, en su caso, el tipo de acotación que presentan.

$f(x) = x^4 - 2x^2$



$g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$



30 Dibuja una función con las siguientes características: tiene un mínimo relativo en $(-3, -1)$, un máximo relativo en $(0, 4)$, y es par.

31 Estudia la simetría de las siguientes funciones, indicando en caso afirmativo de qué tipo de simetría se trata.

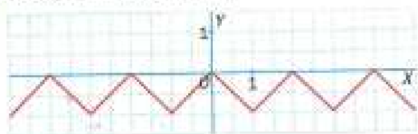
a) $f(x) = x^3 - 4x$

b) $g(x) = 2 - x^4$

c) $h(x) = \dfrac{3}{x - 1}$

d) $j(x) = 1 - x^3$

32 Observa la gráfica siguiente.



a) Si es una función periódica, indica su período.

b) ¿Qué valor toma la función cuando x es par? ¿Y cuando es impar?

c) Indica una cota superior y una cota inferior de la función.

Operaciones con funciones

33 Dadas $f(x) = 3x - 6$ y $g(x) = x^2 + 2x - 4$, calcula:

a) $(2f + g)(x)$ c) $(4g - 3f)(x)$ e) $(f \cdot g)(x)$

b) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ d) $(g \circ f)(x)$ f) $f^{-1}(x)$

34 Si $f(x) = \frac{3}{x+5}$ y $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$, calcula:

a) $(2f - 4g)(x)$ b) $(f \cdot g)(x)$ c) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

35 Comprueba si $f(x) = 2x^2 - 4$ y $g(x) = \sqrt{\frac{x+4}{2}}$ son funciones recíprocas.

36 Calcula las imágenes de $x = 0$, $x = -1$ y $x = 2$ mediante las funciones $(g \circ f)(x)$ y $g^{-1}(x)$, siendo $f(x) = 3x^2 + 4x$ y $g(x) = \sqrt{x+9}$.

37 Si $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ y $g(x) = \sqrt{5-2x}$, calcula:

a) $f^{-1}(x)$ c) $f^{-1}(3)$

b) $g^{-1}(x)$ d) $g^{-1}(2)$

38 Calcula $(g \circ f)(-2)$ y $(f \circ g)(1)$, siendo $f(x) = 2x^2 - 9$ y $g(x) = \frac{1}{2x-1}$.

Funciones definidas a trozos

39 Considera la función $f(x) = \begin{cases} 8 - x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^2 + 9 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

y calcula $f(3)$, $f(10)$, $f(0)$, $f(-1)$ y $f\left(\frac{3}{4}\right)$.

40 Dibuja las siguientes funciones definidas a trozos.

a) $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < -4 \\ 2x + 1 & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2 - 5x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

41 Calcula la imagen de $x = 2$ en cada una de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{si } x < 2 \\ 4 - 3x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 6x + 3 & \text{si } x < 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 8x^3 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2 + 7x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

42 Dibuja $f(x) = |2x + 9|$ y $g(x) = |6 - 3x|$. Indica, para cada una de ellas:

a) ¿Qué valores de x tienen por imagen 1?

b) ¿Cuáles tienen por imagen 0?

c) ¿Y cuáles son los que tienen por imagen −2?

CUESTIONES PARA ACLARARSE

43 Si una función es periódica de período 4, ¿es suficiente conocer su gráfica en el intervalo $[-2, 2]$ para poder representarla en **R**?

44 Si la imagen de 0 mediante una función, f, es 3, ¿qué se puede afirmar de la imagen de 3 respecto de la función recíproca de f, f^{-1}?

45 ¿Qué relación tienen dos funciones que son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante?

46 Una función continua está definida en **R**, es creciente en $(-\infty, -3)$ y en $(4, +\infty)$, y decreciente en $(-3, 4)$. ¿Tiene máximos y/o mínimos relativos?

47 El recorrido de una función es $[-1, 1]$. Razona si está acotada superior y/o inferiormente.

48 Si una función es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$, ¿se puede afirmar que tiene un máximo en $x = 0$?

49 Demuestra si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) $y = |x|$ es una función impar.

b) $y = x^2 + 4$ es creciente en **R**.

c) $y = 1 - x^2$ está acotada superiormente.

d) $y = \frac{2x}{x^2 - x}$ es una función par.

50 El dominio de una función $f(x)$ es **R**, y el de otra, $g(x)$, es $\mathbf{R} - \{2\}$.

¿Se puede calcular $(f + g)(2)$? ¿Y $(f \circ g)(2)$?

51 La función $f(x)$ se anula cuando $x = -1$, $x = 0$ y $x = 3$. Halla el dominio de $\left(\frac{1}{f}\right)(x)$.

52 Demuestra que son ciertas las siguientes afirmaciones.

a) Si dos funciones son pares, su suma también es par.

b) El cociente de dos funciones impares es par.

PROBLEMAS PARA APLICAR

53 Juan está estudiando dos ofertas de trabajo como comercial de electrodomésticos, *A* y *B*, que solo se diferencian en el sueldo.

Oferta *A*: 1050 euros mensuales y 10 euros por cada aparato vendido hasta un máximo de 20 al mes.

Oferta *B*: 600 euros al mes y 20 euros por cada electrodoméstico vendido.

a) Escribe la fórmula que expresa el sueldo mensual de Juan en cada caso en función del número de electrodomésticos vendidos.

b) Calcula el dominio y el recorrido de cada una de las funciones correspondientes.

c) ¿Aumentará siempre el sueldo en función del número de aparatos que venda?

d) ¿Tienen las funciones algún máximo o mínimo?

54 En su movimiento de rotación, la Tierra da una vuelta completa alrededor de su eje en un día.

a) Representa la gráfica de la función que indica el número de grados que gira en función del tiempo durante un día.

b) ¿Cuál sería la gráfica anterior a lo largo de una semana?

c) ¿Está acotada la función semanal?

d) ¿Es una función periódica? ¿Y simétrica?

55 Una empresa fabrica DVD y sus costes de producción, en euros, vienen dados por la expresión $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 25x - 15$, donde *x* es el número de DVD producidos. El precio de venta por unidad es $P(x) = 75 - \frac{x}{2}$. ¿Cuál es la función que expresa el beneficio obtenido con la venta de *x* DVD?

56 Cuando dejas caer una pelota desde una altura cualquiera, el espacio que recorre, *h*, viene dado por la expresión $h = 9{,}8 \cdot t^2$, siendo *t* el tiempo.

Calcula la fórmula que permite obtener el tiempo transcurrido desde que se lanzó la pelota, *t*, en función de la altura a la que se encuentra.

57 Un aljibe tiene 750 litros de agua al comienzo del día. Por una fisura pierde 2 litros cada hora. A la vez, está recibiendo agua a razón de 6 litros a la hora.

a) Estudia el crecimiento de la función que expresa el volumen de agua en el aljibe durante ese día.

b) ¿A qué hora estará más lleno? ¿Y más vacío? Indica las cantidades de agua almacenadas en esos momentos.

58 Un jardinero quiere vallar un terreno de forma cuadrada y área desconocida en el que ha plantado unas flores. Encuentra la fórmula que permite obtener el lado del cuadrado en función de su área.

a) Si el área estuviera comprendida entre 120 y 180 metros cuadrados, ¿cuáles serían el dominio y el recorrido de la función?

b) La función descrita, ¿es creciente o decreciente?

c) ¿Tiene máximos o mínimos?

59 Calcula la fórmula que permite obtener el diámetro de una lata cilíndrica de zumo en función de su altura para que contenga 500 mililitros del mismo.

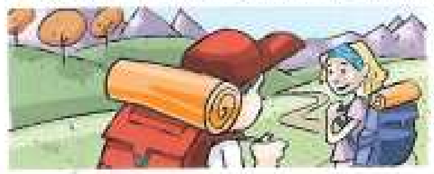
Si la altura de la lata está comprendida entre 12 y 16 centímetros, ¿cuáles son el dominio y el recorrido de esa función?

60 Expresa mediante una función la distancia al lugar de partida a la que se encuentra un grupo de amigos que realiza la siguiente excursión.

a) Durante la primera hora y media caminan a una velocidad constante de 3 kilómetros por hora.

b) Descansan durante la media hora siguiente.

c) Regresan a una velocidad constante de 4,5 km/h.



61 Considera la función del problema anterior.

a) Calcula el dominio y el recorrido.

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Indica sus máximos y mínimos si los tiene.

d) Explica si es una función acotada.

REFUERZO

Concepto y características de las funciones

62 Halla el dominio de las funciones:

a) $y = -x^2 - 4$

b) $y = \dfrac{2x}{4x^2 - 1}$

c) $y = \dfrac{3x^2 + 9}{7x^2 + 5x}$

d) $y = \sqrt{6x - 18}$

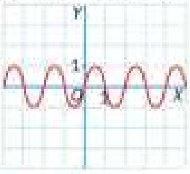
e) $y = \sqrt{12 - 4x}$

f) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

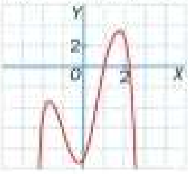
63 Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 4x + x^2$ en los intervalos $(-2{,}2; -2)$, y $(-2; -1{,}8)$.

64 De las siguientes funciones, indica cuáles son periódicas y cuáles están acotadas.

a) $f(x) = \text{sen}(\pi \cdot x)$



b) $f(x) = -x^4 + 6x^2 + 2x - 9$



65 Estudia si las siguientes funciones presentan algún tipo de simetría.

a) $f(x) = 1 - 2x + x^3$

b) $g(x) = x^4 + 2x^2 - 4$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5}$

d) $i(x) = 6x^3 - x$

Operaciones con funciones

66 A partir de las funciones $f(x) = 8 - x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{2x}$, calcula las siguientes funciones.

a) $(g - 2f)(x)$

b) $(f + 3g)(x)$

c) $(f \cdot g)(x)$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

e) $(f \circ g)(x)$

f) $(g \circ f)(x)$

67 Halla la función recíproca de cada una de las siguientes.

a) $f(x) = 5x + 2$

b) $g(x) = 2 - x^3$

c) $h(x) = \sqrt{1 + 3x}$

d) $i(x) = \dfrac{7}{4x}$

Funciones definidas a trozos

68 Calcula $f(-3)$, $f(0)$ y $f(4)$ en la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} 9x - x^2 & \text{si } x < 4 \\ 3x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

69 Dibuja las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ 6x - 15 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$

AMPLIACIÓN

70 Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $y = \sqrt{\dfrac{x + 4}{x - 2}}$

b) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

c) $y = \sqrt{10 + 3x - x^2}$

d) $y = \sqrt{(x - 2)(x + 4)(x - 1)}$

e) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 9}}$

f) $y = \dfrac{|x - 6|}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

71 Si el dominio de una función $f(x)$ es $[3, +\infty)$ y el de otra, $g(x)$, es $\mathbf{R} - \{-2, -1, 3\}$, ¿cuál es el dominio de $(f + g)(x)$?

72 Dibuja las siguientes funciones e indica si tienen algún máximo o mínimo y de qué tipo es.

a) $f(x) = |3x^2 - 12|$

b) $g(x) = |x^2 + 2|$

73 El dominio de la función $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$ es $\mathbf{R}$. Explica si es posible que exista un valor en el que $f(x)$ sea igual a 0.

74 Dadas las funciones $f(x) = 1 - 5x$, $g(x) = \dfrac{2x}{x - 4}$ y $h(x) = \sqrt{3x - 2}$, calcula $(h \circ g \circ f)(x)$.

75 Estudia la simetría de las siguientes funciones.

a) $y = |x^2 - 5x|$

b) $y = |1 + 4x - x^2|$

c) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{3x^2}{4 + x^4}$

76 Si $f(x)$ es una función impar y $g(x)$ es par, ¿qué tipo de simetría tiene la composición $(g \circ f)(x)$?

77 Calcula la función recíproca de las siguientes.

a) $f(x) = x^2 - 2x$

b) $g(x) = |9x - 5|$

78 Representa gráficamente las siguientes funciones e indica si están acotadas.

a) $f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x \leq 5 \\ x & \text{si } 5 < x \leq 7 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

> a c t i v i d a d e s

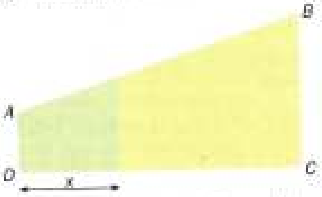
PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

79 Evolución del área

En el trapecio rectángulo *ABCD* de la figura adjunta se verifica que:

$AD = 4$ cm $\qquad DC = 14$ cm $\qquad BC = 8$ cm

Un punto x se desplaza por el segmento DC de tal forma que su distancia a D es x centímetros.

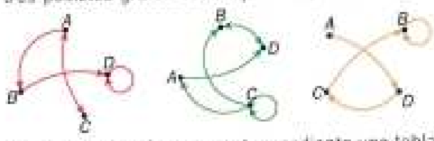


a) Escribe, en función de x, el área de la figura sombreada.

b) Halla el valor de x para que las dos zonas en las que queda dividido el trapecio tengan la misma área.

80 Grafos

Un grafo es una representación de una relación entre los elementos de un mismo conjunto. Observa tres posibles grafos del conjunto $\{A, B, C, D\}$.



Un grafo se puede representar mediante una tabla de unos y ceros: un uno indica que el elemento de esa fila está relacionado con el de esa columna, y un cero, que no lo está.

Observa la tabla correspondiente al primer grafo.

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	0	0	0	1
C	1	0	0	0
D	0	0	0	1

a) Escribe las tablas asociadas a los otros dos grafos.

b) ¿Cuáles de estos grafos pueden considerarse funciones?

AUTOEVALUACIÓN

1 Calcula el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $y = x^2 + 4x - 5$ $\qquad$ d) $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$

b) $y = x^2 + 2x - 3$ $\qquad$ c) $y = \sqrt{3x^2 + 4}$

2 Estudia el crecimiento y decrecimiento de las funciones en los intervalos que se indican. Ten presente cómo es la gráfica de cada una.

a) $f(x) = 5 - 6x$ en $[0,5; 1]$

b) $g(x) = x + x^2$ en $[-1,5; -1]$ y en $[0,2; 1]$

3 Realiza las siguientes operaciones con las funciones $f(x) = 4x - 2x^2$ y $g(x) = 3 - x - x^2$.

a) $(5f - 2g)(x)$ $\qquad$ c) $(f \cdot g)(x)$

b) $\left(\dfrac{3g}{f}\right)(x)$ $\qquad$ d) $(f + 4g)(x)$

4 Calcula la función recíproca de cada una de las siguientes.

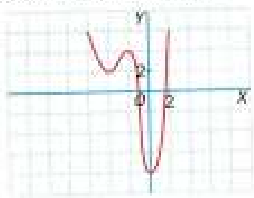
a) $f(x) = 7x - 1$ $\qquad$ c) $h(x) = \sqrt{6x + 9}$

b) $g(x) = \dfrac{2}{1 - x}$ $\qquad$ d) $j(x) = x^2 + 9$

5 Para las funciones del ejercicio anterior, calcula:

a) $(f \circ g)(x)$ $\quad$ b) $(g \circ h)(x)$ $\quad$ c) $(g \circ f)(0)$

6 Observe la gráfica de la función f.



a) Encuentra el dominio y el recorrido.

b) Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Halla sus máximos y mínimos e indica de qué tipo son.

d) ¿Qué tipo de acotación tiene?

7 Dibuja las siguientes funciones.

a) $f(x) = |24 - 8x|$

b) $g(x) = \begin{cases} 4 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ 3 - x & \text{si } x > -1 \end{cases}$

8 Estudia si son simétricas y, en su caso, de qué tipo son las siguientes funciones.

a) $f(x) = 5x^3 + 4x$ $\qquad$ b) $g(x) = \dfrac{x^4}{1 - x^2}$

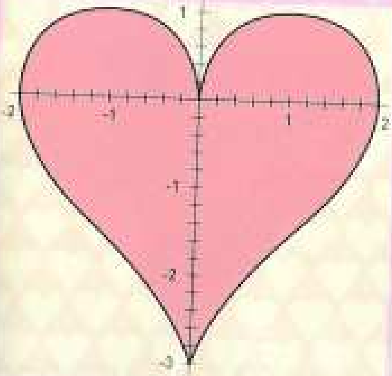
MURAL DE MATEMÁTICAS

AMOR MATEMÁTICO

Si te enamoras de alguien aficionado a las matemáticas, la mejor manera de declararte puede ser enviarle el siguiente mensaje:

$f(x) = \text{sqrt}\,(1 - (|x| - 1)^2)$
(Valores positivos del eje Y)
$g(x) = \text{arcos}\,(1 - |x|) - \pi$
(Valores negativos del eje Y)

Cuando lo resuelva, esto es lo que aparecerá:



Si la relación prospera y si quieres lucirte, existen otras muchas variantes, incluidos corazones de tres dimensiones y otros con formas fractales. Puedes encontrar estas y muchas más ideas en *Romantic Mathematics*: www.e-sm.net/mt4xes002

La f de función

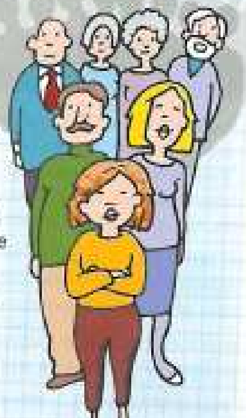
Fue uno de los Bernoulli, Johann, quien a finales del siglo XVII empezó a utilizar símbolos especiales para representar funciones.

En una carta a Leibniz, le comentaba que prefería utilizar las letras mayúsculas correspondientes a los nombres de las variables para así liberar a la memoria de tener que recordar de qué variable es cada función. Más tarde, en 1718, simplificaría las cosas utilizando la letra griega ϕ (léase "fi"), precursora de nuestra "f", de modo que si ϕ era una función de x escribía ϕx. Pero fue el famoso matemático Euler quien en sus *Commentari* de San Petersburgo de 1734 dejaría las cosas tal y como están hoy al utilizar como nombre genérico para las funciones la letra "f" e indicar la variable entre paréntesis.

Matetiempos

Nombres y apellidos

El apellido representa la familia a la que perteneces y el nombre te identifica entre sus componentes. Juan Pérez, Jordi Castellet, Carmen Martínez, Pavel Iovanescu y Amal Kasar son algunos alumnos de una clase de 4.° de ESO. Si relacionamos el nombre de cada uno con su apellido, ¿esta relación es una función? Si cada alumno tuviera dos nombres, ¿la relación seguiría siendo una función? ¿Y si utilizasen los dos apellidos?



11 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

El lagarto gigante de El Hierro, el lince ibérico o la garduña de Ibiza son animales en peligro de extinción. El número de ejemplares de una determinada especie es una función del tiempo en la que intervienen múltiples factores, como la abundancia o escasez de alimento, las condiciones climáticas o la acción del ser humano.

Estos factores se encuentran en un equilibrio ecológico que, en muchas ocasiones, se rompe a causa del comportamiento humano. Muchas especies han quedado extinguidas con el paso de los años.

¿Seguirá decreciendo el número de ejemplares de lagarto gigante en España? ¿Se llegará al límite de su extinción?

En esta unidad vamos a estudiar límites de funciones matemáticas que pueden describir situaciones muy diversas.

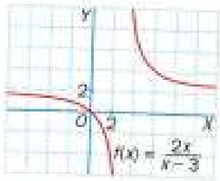
1. Tendencia de una función

Ejemplo. *Estudia cómo se comporta la función* $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$

a) ¿A qué valor se acerca f(x) cuando x se aproxima o tiende a 1?

b) ¿A qué valor tiende f(x) cuando x tiende a 3?

c) ¿A qué valor tiende f(x) cuando x tiende a +∞? ¿Y a −∞?



a) Formamos la siguiente tabla de valores.

x tiende a 1 por la izquierda: $x \to 1^-$ — $1^+ \leftarrow x$: x tiende a 1 por la derecha

x	...	0,99	0,999	0,9999	...	1	...	1,0001	1,001	1,01	...
$f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$	...	−0,985	−0,998	−0,999	...	−1	...	−1,000	−1,001	−1,015	...

$f(x)$ tiende a −1

Por tanto, cuando x se acerca a 1, se verifica que $f(x)$ tiende a −1.

b) Formamos la siguiente tabla de valores.

x tiende a 3 por la izquierda: $x \to 3^-$ — $3^+ \leftarrow x$: x tiende a 3 por la derecha

x	...	2,99	2,999	2,9999	...	3	...	3,00001	3,0001	3,001	...
$f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$	...	−598	−5998	−59998	...	No está definido	...	600002	60002	6002	...

$f(x)$ tiende a −∞ — $f(x)$ tiende a +∞

Cuando x se acerca a 3 por la izquierda (3^-), se verifica que $f(x)$ se hace cada vez más pequeño, llegando a ser menor que cualquier número; es decir, $f(x)$ se aproxima o tiende a −∞.

Por otra parte, cuando x se acerca a 3 por la derecha (3^+), se verifica que $f(x)$ se hace cada vez más grande, llegando a ser mayor que cualquier número; es decir, $f(x)$ se aproxima o tiende a +∞.

c) Formamos la siguiente tabla de valores.

$-\infty \leftarrow x$: x tiende a −∞ — x tiende a +∞: $x \to +\infty$

x	−∞	...	−100 000	...	−1000	...	0	...	1000	...	100 000	...	+∞
$f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$	2	...	1,99994	...	1,994	...	0	...	2,006	...	2,00006	...	2

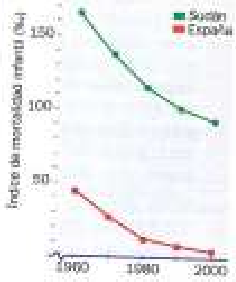
$f(x)$ tiende a 2 — $f(x)$ tiende a 2

Cuando x tiende a −∞, se observa que $f(x)$ se acerca a 2.

Cuando x se aproxima a +∞, se observa que $f(x)$ tiende a 2.

Sabías que...

En la actualidad, la mortalidad infantil en España se acerca prácticamente a 0.



Los esfuerzos que se están realizando en los países en vías de desarrollo deberían conseguir que se alcance también este límite lo antes posible.

Ejercicios propuestos

1 ¿A qué valor tiende la función $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$?

a) Cuando x se acerca a 3.

b) Cuando x se aproxima a 5.

c) Cuando x se acerca a +∞.

d) Cuando x se aproxima a −∞.

2 Indica a qué valor tiende la función $g(x) = \dfrac{3x+2}{x(x+2)}$.

a) Cuando x se aproxima a 4.

b) Cuando x se acerca a 0.

c) Cuando x se aproxima a +∞.

d) Cuando x se acerca a −∞.

2. Concepto de límite de una función

El matemático francés Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) fue autor, junto con Denis Diderot, de la *Enciclopedia francesa*, en la que redactó los artículos 'Límite' y 'Diferencial'.

En la función $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ que hemos estudiado en el epígrafe anterior:

a) Cuando x tiende a 1, la función se acerca a -1. Por tanto, diremos que el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es -1, y lo expresaremos así:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x}{x-3} = -1$$

b) Cuando x se aproxima a 3 por la izquierda, 3^-, la función se acerca a $-\infty$, y cuando x tiende a 3 por la derecha, 3^+, la función se aproxima a $+\infty$. Por tanto, diremos que el **límite** por la izquierda de $f(x)$ cuando x tiende a 3 es $-\infty$, y el **límite** por la derecha de $f(x)$ cuando x se acerca a 3 es $+\infty$. Lo expresaremos así:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = +\infty$$

Estos límites que obtenemos al estudiar la tendencia de la función a la izquierda y a la derecha de un punto se denominan **límites laterales**.

c) Cuando x se aproxima a $-\infty$, la función se acerca a 2, y cuando x se aproxima a $+\infty$, la función se acerca a -2. Por tanto, diremos que el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende $-\infty$ es 2, y el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es 2. Lo indicaremos así:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x-3} = 2 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x-3} = 2$$

Ten en cuenta

Si una función tiene límite L cuando x tiende a $x_0 (x \to x_0)$, quiere decir que x puede tomar cualquier valor tan próximo a x_0 como se desee, sin llegar a tomar el valor x_0. En dicho punto, la función no tiene por qué valor L; puede tomar cualquier otro valor o no estar definida.

Por ejemplo, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ y, en cambio, la función no está definida en $x = 0$.

En la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, mientras que en el punto 2, la función vale 0.

Una función $f(x)$ tiene por **límite** en el punto x_0 el valor L si, a medida que x se acerca a x_0, se verifica que sus transformados, $f(x)$, se aproximan a L tanto como queramos. Lo expresamos así:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

El valor x_0 puede ser a, $-\infty$, $+\infty$, a^- y a^+; en estos dos últimos casos, el límite se llama **límite lateral**. El valor L puede ser cualquier número real, o bien $+\infty$ o $-\infty$.

Ejercicio resuelto

1. Calcula el límite en $x = 1$ de la función $f(x) = 5x + 3$.

x	...	0,99	0,999	0,9999	...	1	...	1,0001	1,001	1,01	...
$f(x) = 5x + 3$	...	7,95	7,995	7,9995	...	**8**	...	8,0005	8,005	8,05	...

Por tanto, $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 5x + 3 = 8$

Ejercicios propuestos

3 Halla el límite de la función $f(x) = 3x^2 + 3$ en los puntos $x = 1$ y $x = -3$.

4 Calcula el límite de la función $g(x) = \frac{3x+1}{x(x+5)}$ en los puntos $x = 1$ y $x = 0$.

5 Calcula $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$.

6 Halla $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-1}{x+2}$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x-1}{x+2}$.

3. Propiedades de los límites. Expresiones indeterminadas

Los límites de funciones presentan propiedades análogas a los límites de sucesiones numéricas.

- Si una función tiene límite en un punto, este es único. Una función no puede tener dos límites diferentes en el mismo punto.
- Si una función presenta límites laterales distintos en un punto, entonces no tiene límite en ese punto.
- Si las funciones f y g tienen límite en $x = x_0$ y c es un número real cualquiera, se verifican las siguientes propiedades.

$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} (c \cdot g)(x) = c \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} c = c$
$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$ (si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$)	$\lim\limits_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)] = f\left[\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right]$
$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ (si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$)	$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$
	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$

Sabías que...

El matemático suizo **Simon Antoine Jean Lhuilier** (1750-1840) fue el primero que empleó la abreviatura "lim", en 1786, para referirse al límite de una función. También fue el primero en introducir la idea de límite lateral.

Expresiones indeterminadas

Las propiedades de los límites que acabamos de ver no siempre conducen a una expresión con sentido.

Ejemplo. *Calcula* $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ *usando la propiedad del límite de un cociente.*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} (x-1)}{\lim\limits_{x \to 1} (x^2-1)} = \frac{1-1}{1^2-1} = \frac{0}{0}$$

Esta expresión carece de sentido. ¿Cuál es su valor?

Se dice que la anterior es una **expresión indeterminada**. Esto no significa que el límite no exista o que no se pueda hallar, sino que no es posible calcularlo aplicando directamente las propiedades de los límites.

Las expresiones $\frac{k}{0}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, ∞^0 y 0^0 se llaman **expresiones indeterminadas**.

Ten en cuenta

Para calcular un límite no es necesario, generalmente, construir una tabla y observar la tendencia de la función, sino que basta con sustituir en la expresión de la misma el valor de x en el que se desea encontrar el límite.

$\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2) = 1^2 + 2 = 3$

Ejercicios propuestos

7 Dadas $f(x) = \frac{5x}{x+1}$ y $g(x) = \frac{-2x+3}{x-4}$, calcula:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \cdot g(x)$

8 Dada la función $f(x) = \frac{5x+3}{2x+1}$, halla:

a) $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 1} 4f(x)$

Límites de funciones racionales

Al calcular límites de **funciones racionales**, cocientes de expresiones polinómicas, pueden aparecer tres tipos de expresiones indeterminadas:

$$\frac{k}{0}, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

TEN EN CUENTA

A diferencia del resto de indeterminaciones, las expresiones $\frac{k}{0}$ valen siempre ∞. La indeterminación, por tanto, se reduce a si valen $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo. *Calcula el siguiente límite:* $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x}{x-3}$

Al sustituir x por 3 aparece la expresión indeterminada $\frac{6}{0}$, que carece de sentido. Para encontrar el límite buscado, calculamos los límites laterales en $x = 3$.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = +\infty$$

Para resolver la indeterminación $\frac{k}{0}$, se calculan los límites laterales; si son iguales, la función tiene límite $+\infty$ o $-\infty$; en caso contrario, no existe el límite.

Ejemplo. *Calcula el límite* $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

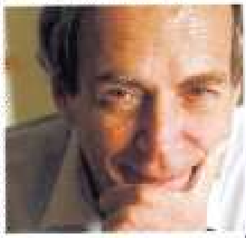
Al aplicar la propiedad del límite de un cociente, se consigue la expresión indeterminada $\frac{0}{0}$. Si descomponemos factorialmente el numerador y el denominador y simplificamos, obtenemos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Para resolver la indeterminación $\frac{0}{0}$, se descomponen en factores el numerador y el denominador, y se simplifica la función racional.

SABÍAS QUE...

En 1949, el físico estadounidense **Richard Feynman** (1918-1988) resolvió un problema sorprendente: usando las ecuaciones de la física moderna, al calcular teóricamente la fuerza con que se repelen los electrones entre sí, se obtenía un valor infinito. Feynman descubrió que, también en física, expresiones aparentemente sin sentido corresponden en realidad a números bien definidos.



Ejemplo. *Calcula el límite* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{3x^2+1}$

Al aplicar el límite del cociente, se llega a la expresión indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Si dividimos el numerador y el denominador entre la máxima potencia de x que aparece en la fracción, obtenemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{3x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{3}$$

Ya que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Para resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, se dividen el numerador y el denominador entre la máxima potencia de x que contenga la fracción.

Otros tipos de límites

Ejemplo. *Calcula* $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)]$ *si* $f(x) = x$ *y* $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x}$.

La aplicación directa de la propiedad del límite de una diferencia nos lleva a:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{x^2 + 2x + 1}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} x - \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \infty - \infty$$

Esta es una expresión indeterminada. Si realizamos el cálculo operando antes de tomar el límite, obtenemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{x^2 + 2x + 1}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{-2x}{x} - \dfrac{1}{x}}{\dfrac{x}{x}} = -2$$

En general, al descomponer o simplificar una función, se facilita el cálculo de su límite.

Ejemplo. *Calcula* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 5}{x + 3} \right)^{x + 2}$.

Al aplicar directamente las propiedades de los límites y resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, obtenemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 5}{x + 3} \right)^{x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 5}{x + 3} \right)^{\lim\limits_{x \to +\infty} x + 2} = 1^{\lim\limits_{x \to +\infty} x + 2} = 1^{\infty}$$

La indeterminación del tipo 1^{∞} se resuelve transformando la expresión de partida en una expresión asociada al **número e**. Por ejemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 5}{x + 3} \right)^{x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 3 + 2}{x + 3} \right)^{x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x + 3} \right)^{x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\dfrac{x + 3}{2}} \right)^{\frac{x + 2}{2}} \right]^{2} = e^2$$

Recuerda

Cuando n tiende a ∞, el límite de la sucesión

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

es el número e. Del mismo modo:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

Y puede demostrarse que:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{g(x)} \right)^{g(x)} = e,$$

siempre que la función $g(x)$ cumpla la condición:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \infty$$

Para resolver la indeterminación 1^{∞}, se transforma la función hasta obtener una expresión asociada al número e.

También puede aplicarse esta regla:

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} B(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} B(x)^{\alpha(x)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x)(B(x) - 1)}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

9 Dadas las funciones $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{5x^2 - x + 7}{x + 1}$, calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - g(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$

10 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 1}{x + 2} \right)^{\frac{x + 2}{3}}$

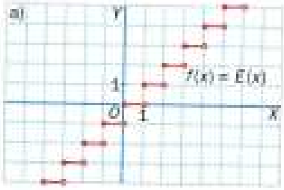
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} \right)^{2x + 5}$

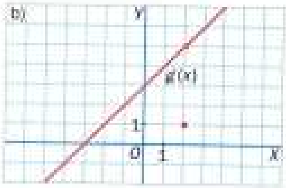
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 3}{x + 1} \right)^{2x + 1}$

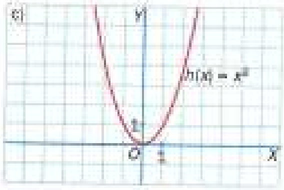
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2} \right)^{x^2 + 3}$

5. Continuidad de funciones

Observa las siguientes funciones dadas por sus gráficas.







a) La función $f(x) = E(x)$ es la que asigna a cada número real, x, el entero más próximo y menor o igual que x. A la izquierda de $x = 2$, la función vale $y = 1$, mientras que en el punto $x = 2$ y a su derecha, la función vale $y = 2$. Por tanto, en el punto $x = 2$ se produce un **salto**, una rotura en su gráfica. La función no tiene límite en $x = 2$, por lo que decimos que **no es continua** en ese punto.

b) La función $g(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ presenta un **agujero** en $x = 2$; sin embargo, sí tiene límite en ese punto, ya que existen los límites laterales y son iguales.

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} (x + 3) = 5; \qquad \lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + 3) = 5$$

Aunque también existe la función en $x = 2$, ya que $g(2) = 1$, este valor no coincide con el del límite de la función en ese punto, 5, por lo que $g(x)$ **no es continua** en $x = 2$.

c) Si analizamos el comportamiento de la función $h(x) = x^2$ en el punto $x = 2$, observamos que su gráfica no experimenta salto alguno en dicho punto y que tampoco presenta un agujero en el mismo. Entonces decimos que la función $h(x)$ **es continua** en $x = 2$.

Ten en cuenta

Una regla práctica nos enseña que una función es continua en un punto cuando se puede dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel en dicho punto.

Eso equivale a decir que la gráfica de la función no presenta saltos ni agujeros en dicho punto.

Una función $f(x)$ **es continua** en el punto $x = a$ si se verifica que:

- Existe el límite de la función $f(x)$ en $x = a$.
- La función se encuentra definida en $x = a$; es decir, existe $f(a)$.
- Los dos valores anteriores coinciden.

$$f \text{ es continua en } x = a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Una función es continua en un intervalo cuando es continua en todos los puntos del mismo.

Las funciones polinómicas son continuas en todo **R**, mientras que las funciones racionales son continuas en **R** salvo en los puntos en los que se anula el denominador.

Ejercicios propuestos

11 Construye una tabla que recoja si las funciones estudiadas en los ejemplos de esta página están definidas en $x = 2$, si existe el límite en ese punto, si ambas cantidades coinciden y si las funciones son continuas en él.

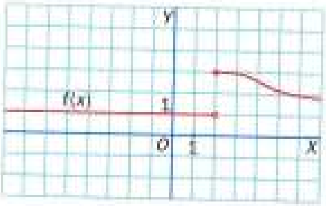
12 Estudia la continuidad de estas funciones.

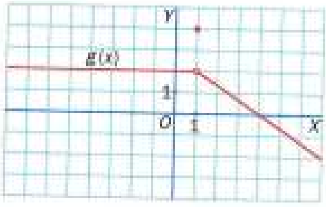
a) $y = |x|$

b) $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

6. Discontinuidades

Cuando una función no es continua en un punto, se dice que es **discontinua en dicho punto**. Existen dos tipos de discontinuidades.





a) La función $f(x)$ presenta un **salto** en $x = 2$, ya que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.
A esta discontinuidad la llamaremos **inevitable**.

b) La función $g(x)$ presenta un **agujero** en $x = 1$. Se verifica que:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = 2, \text{ pero } \lim_{x \to 1} g(x) \neq g(1) = 4$$

A esta discontinuidad la llamaremos **evitable**. Si a la función $g(x)$ le asignamos el valor 2 para $x = 1$, habremos evitado la discontinuidad. Al valor $y = 2$ se le llama **verdadero valor** de la función en $x = 1$.

Una función presenta una **discontinuidad inevitable** en $x = a$ cuando existen los límites laterales en dicho punto, pero son distintos. Se llama **salto de la función** a la diferencia entre los límites laterales.

Una función presenta una **discontinuidad evitable** en $x = a$ cuando existe el límite de la función en el punto, pero no coincide con el valor de la función en el mismo o no está definida.

Ten en cuenta

Las discontinuidades inevitables pueden ser de dos tipos.

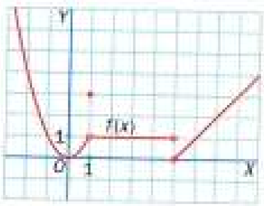
- De **salto infinito**, cuando al menos uno de los dos límites laterales en el punto considerado es ∞.
- De **salto finito**, cuando los dos límites laterales son finitos, aunque diferentes.

EJERCICIO RESUELTO

2. Estudia la continuidad de la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

En cada tramo, la función viene dada por funciones continuas; por tanto, las posibles discontinuidades se encuentran en los puntos donde cambia su definición, $x = 1$ y $x = 5$.



En $x = 1$, la función tiene una discontinuidad evitable, ya que existe el límite: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$; pero su valor no coincide con el de la función en el punto, $f(1) = 3$. Si asignamos en $x = 1$ el valor $y = 1$, conseguimos que la función sea continua en $x = 1$.

En $x = 5$, la función presenta una discontinuidad inevitable de salto finito, ya que no existe el límite: $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = 0$. El salto de la función es $1 - 0 = 1$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

13 Estudia la continuidad de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x + 5}$

b) $g(x) = +\sqrt{x}$

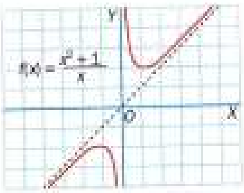
c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

d) $j(x) = \sqrt{2 + x^2}$

14 Analiza la continuidad de la siguiente función. ¿Cuál es su verdadero valor en $x = 3$?

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

4. Asíntotas



Si observas la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, puedes comprobar que presenta cuatro partes con longitud ilimitada.

- Si $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$.
- Si $x \to 0^-$ y $x \to 0^+$, ya que entonces $y \to -\infty$ e $y \to +\infty$, respectivamente.

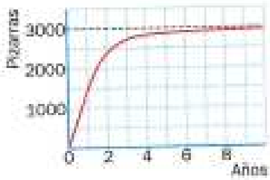
Estas cuatro partes ilimitadas de la gráfica de $f(x)$ se acercan a rectas hasta prácticamente confundirse con ellas. A estas rectas se las llama **asíntotas**.

Una **asíntota** de una función es una recta hacia la que se aproxima una parte de longitud ilimitada de la función, cuando el valor de la variable **x** o el de la función **y tiende a** $-\infty$ o a $+\infty$.

La distancia entre los valores de la función y los correspondientes de una asíntota tiende a 0, tanto más, cuanto más nos alejamos sobre la curva.

Asíntotas horizontales

Ejemplo. *Se estima que el número de pizarras electrónicas en los centros educativos de una comunidad autónoma crecerá según la función* $p(x) = \dfrac{3000x^2}{x^2+1}$*, donde x es el número de años. ¿Cuál es el "techo" que se alcanzará?*



Calculamos $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3000x^2}{x^2+1} = 3000$. Esto indica que, en el transcurso del tiempo, el número de pizarras electrónicas se va a acercar a 3000.

Si observamos la gráfica de la función $p(x)$, comprobamos que, en pocos años, se aproximará mucho a la recta $y = 3000$.

Decimos que la recta $y = 3000$ es una **asíntota horizontal** de la función $p(x)$.

Una función $f(x)$ tiene una **asíntota horizontal** $y = h$ si se cumple alguna de estas igualdades.

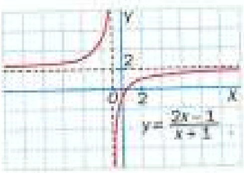
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = h \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = h$$

Si ambos límites son diferentes, la función posee dos asíntotas horizontales.

Asíntotas verticales

En la función $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$, si el valor de x se aproxima a -1 por la izquierda, la variable y tiende a $+\infty$, y si se acerca a -1 por la derecha, la variable y tiende a $-\infty$. En este caso, decimos que la recta $x = -1$ es una **asíntota vertical** de la función y.

Las asíntotas verticales de las funciones racionales se obtienen para los valores de x que anulan el denominador, pero no el numerador.



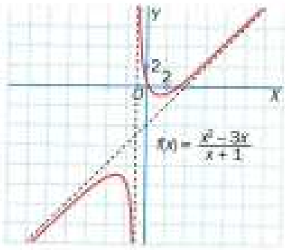
Una función $f(x)$ presenta una **asíntota vertical** $x = k$ si:

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to k^+} f(x) = \pm\infty$$

Una función puede tener cualquier número de asíntotas verticales.

Asíntotas oblicuas

Observa a la derecha la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$.



Si dividimos el numerador entre el denominador, resulta:

$$\frac{x^2 - 3x}{x + 1} = x - 4 + \frac{4}{x + 1}$$

A medida que x tiende a $\pm\infty$ se verifica que $\dfrac{4}{x + 1}$ se acerca a 0.

Por tanto, la gráfica de la función $f(x)$ se aproxima a la recta $y = x - 4$. Decimos que la recta $y = x - 4$ es una **asíntota oblicua** de la función $f(x)$.

Una función racional presenta una asíntota oblicua si el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

Una función $f(x)$ tiene una **asíntota oblicua** $y = mx + n$ si cuando $x \to \pm\infty$ se verifica que $f(x) \to mx + n$.

Una función puede tener, a lo sumo, dos asíntotas oblicuas: una, cuando $x \to +\infty$, y otra, cuando $x \to -\infty$.

EJERCICIO RESUELTO

4. Halla todas las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{-x^3 - 5}{x^2 + 2x + 1}$.

Buscamos primero las asíntotas verticales a partir de los valores de x que anulan el denominador. Como $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ se hace 0 en $x = -1$ y este valor no anula el numerador, se cumple que:

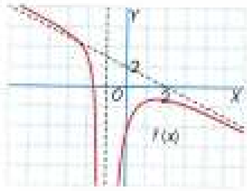
$$\lim_{x \to -1} \frac{-x^3 - 5}{x^2 + 2x + 1} = \frac{-4}{0} = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Para hallar las asíntotas horizontales y oblicuas, dividimos el numerador entre el denominador:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-x^3 & & & -5 & x^2 + 2x + 1 \\
\hline
+x^3 & +2x^2 & +x & & -x + 2 \\
\hline
& 2x^2 & +x & -5 & \\
& -2x^2 & -4x & -2 & \\
\hline
& & -3x & -7 = R &
\end{array}$$

$$\frac{-x^3 - 5}{x^2 + 2x + 1} = -x + 2 + \frac{-3x - 7}{x^2 + 2x + 1}$$

Tiende a 0 cuando x se acerca a $+\infty$



La asíntota oblicua es $y = -x + 2$.

Si el cociente hubiera sido un número entero, la función habría tenido una asíntota horizontal.

EJERCICIOS PROPUESTOS

7 Encuentra las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{5x + 2}{x - 1}$

b) $y = \dfrac{-3x + 2}{x}$

c) $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - x - 6}$

d) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - x}$

8 Calcula las asíntotas oblicuas de esta función.

$$y = \frac{-2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 4}$$

9 Halla todas las asíntotas de la siguiente función.

$$y = \frac{4x^3}{x^2 - x - 6}$$

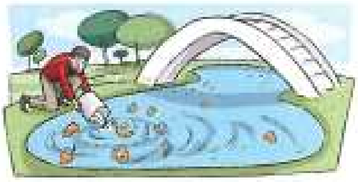
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

CONSTRUYE E INTERPRETA UNA TABLA

Cuando debamos usar funciones difíciles de representar, podemos tratar de construir una tabla de valores y sacar conclusiones a partir de ella.

Problema

Para repoblar un estanque, el departamento de Parques y Jardines ha introducido cinco parejas de carpas. El estanque dispone de unos recursos limitados (caudal de agua, alimento...), de modo que la población de carpas no podrá superar cierto límite. El número de ejemplares en función del tiempo se puede estimar usando esta fórmula.



$N(t) = \dfrac{150}{1 + 14 \cdot 1{,}05^{-t}}$, donde t es el tiempo en meses.

- ¿Cuántos peces habrá al cabo de un año? ¿Y después de dos?
- ¿Cuál es el número máximo de ejemplares que pueden vivir en el estanque?

Resolución

Esta función se conoce como **función logística**. Vamos a tratar de estudiarla sin representarla.

Construye la tabla de valores de la función

Empleamos la calculadora para dar valores en la fórmula anterior y redondeamos los resultados, ya que la cantidad de peces debe ser un número natural.

Interpreta la información que aportan las tablas

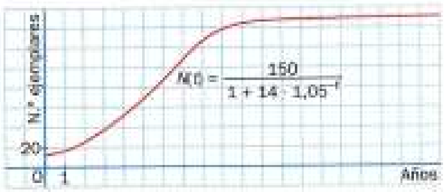
A partir de la tabla, calculamos el límite de la función $N(t)$, es decir, el número máximo de ejemplares en el estanque. En la primera tabla estudiamos la evolución mes a mes durante los dos primeros años, y en la segunda, qué ocurre durante los veinte primeros años, y la diferencia en porcentaje con el año anterior.

Meses	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	18	21	24
Ejemplares	10	10	11	11	12	13	13	14	14	15	16	16	**17**	19	22	25	**28**

Años	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20
Ejemplares	17	28	44	64	86	106	122	133	140	144	148	149	150	150	150
Crecimiento (%)	71	65	56	46	34	23	15	9,1	5,3	3,1	1	0,3	0,1	0,03	0,01

El crecimiento es muy rápido hasta el octavo año, siendo superior al 10% anual. Después se ralentiza hasta los 14-15 años, a partir de los cuales no hay variaciones significativas. La población se estabiliza en 150 ejemplares, el máximo.

Este valor es el límite de la función $N(t)$, que hemos obtenido no a partir de su fórmula, sino de su tabla. La gráfica confirma estos resultados.



PROBLEMAS PROPUESTOS

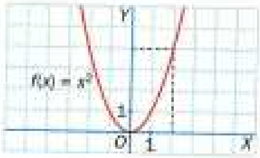
15 ¿Crees que soltando inicialmente el doble de peces se llenaría el estanque en la mitad de tiempo? Estudia la función correspondiente:

$$N(t) = \frac{150}{1 + 6{,}5 \cdot 1{,}05^{-t}}$$

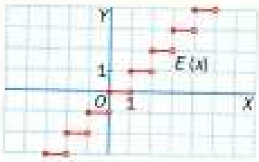
16 ¿Qué ocurriría si soltáramos los 10 peces en un estanque con una capacidad máxima de 300? Analiza la función correspondiente.

$$N(t) = \frac{300}{1 + 29 \cdot 1{,}05^{-t}}$$

IDEA DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN



$\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$



$\lim\limits_{x \to 2^-} E[x] = 1;\ \lim\limits_{x \to 2^+} E[x] = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x + 5}{x} = 2;\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x + 5}{x} = 2$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Si una función tiene límite en un punto, este es único.

- Si una función tiene límites laterales distintos en un punto, entonces no tiene límite en el mismo.
- Si f y g son tales que existen $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ y c es un número real cualquiera, entonces se verifican las propiedades del cuadro.

$\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} (c \cdot g)(x) = c \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} c = c$
$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$ (si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$)	$\lim\limits_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)] = f\left[\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right]$
$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ (si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$)	$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$

EXPRESIONES INDETERMINADAS

$\frac{k}{0}$ $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$; 1^{∞}; ∞^{0} 0^{0}

RESOLUCIÓN

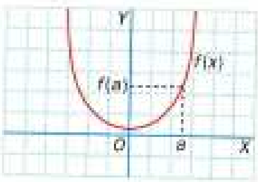
$\frac{k}{0}$: Se calculan los límites laterales.

$\frac{0}{0}$: Se descomponen en factores el numerador y el denominador y se simplifica.

$\frac{\infty}{\infty}$: Se dividen el numerador y el denominador por la máxima potencia de la fracción.

1^{∞}: Si $B \to 1$ y $\alpha \to +\infty$ $\lim B^{\alpha} = e^{\lim \alpha(B-1)}$

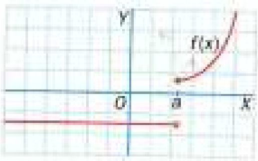
CONTINUIDAD EN UN PUNTO



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

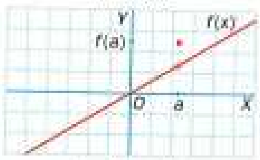
DISCONTINUIDAD EN UN PUNTO

Inevitable



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

Evitable



$\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Concepto de límite

17 Utilizando una tabla, halla el valor al que tienden las siguientes funciones cuando x se acerca a $+\infty$.

a) $f(x) = 4x^2 + 5$
b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$
c) $f(x) = 3x - 2x^2$
d) $f(x) = \frac{x+1}{2x+6}$

18 Halla el valor al que tienden las funciones del ejercicio anterior cuando x se aproxima a $-\infty$. ¿En qué apartados obtienes el mismo resultado que en el ejercicio anterior?

19 Calcula la tendencia de las siguientes funciones cuando x se acerca a 3, distinguiendo si es por la derecha o por la izquierda.

a) $y = 5x - 8$
b) $y = \frac{x}{x+1}$
c) $y = 7 - x^2$
d) $y = \frac{6}{x}$

20 ¿Cuál es el límite de estas funciones cuando x tiende a 4?

a) $f(x) = \frac{2}{x-4}$
b) $f(x) = \frac{x}{(x-4)^2}$
c) $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$
d) $f(x) = \frac{x+1}{4-x}$

21 Halla el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

a) $f(x) = 2^x$
b) $f(x) = x^x$
c) $f(x) = \left(\frac{1}{x-6}\right)^x$
d) $f(x) = \left(\frac{x+1}{2x}\right)^x$

22 Calcula la tendencia de estas funciones en los puntos que se indican.

a) $y = \sqrt{\frac{x+6}{x-2}}$ cuando $x \to 3$
b) $y = (1+x)^{\frac{1}{x-2}}$ cuando $x \to 2$
c) $y = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$ cuando $x \to 0$

Cálculo de límites

23 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x + 3)$
b) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{9-5x}\right)^2$
c) $\lim_{x \to -4} (2x+6)^{x-4}$
d) $\lim_{x \to -1} \frac{x+2}{x^2+1}$
e) $\lim_{x \to -2} \frac{2x-x^2}{x-2}$
f) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{6-x}{2x+3}\right)^x$

24 Halla estos límites de funciones en el infinito.

a) $\lim_{x \to +\infty} (5x^2 + x - 1)$
b) $\lim_{x \to +\infty} (8 - x^4)$
c) $\lim_{x \to -\infty} (2 - x^2)$
d) $\lim_{x \to -\infty} (1 + x + x^3)$

25 Indica cuáles de los siguientes límites dan lugar a una indeterminación y cuál es esta.

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2-3x}$
b) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x^2+2x}$
c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x-5}$
d) $\lim_{x \to 1} \frac{4x^2-8}{x-1}$

26 Halla los siguientes límites en el infinito.

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4+3x}{x^2-2}$
b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1+3x^2}{x} - 2x$
c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3+x+x^3}{5x^3-x+1}$
d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3-x^2}{2x^3+3x}$

27 Calcula los límites que se indican.

a) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-4x-5}{x-5}$
b) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}$
c) $\lim_{x \to -1} \frac{2x+2}{x^2-1}$
d) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2-x}{x^2+4x}$

28 Halla el valor de estos límites.

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3-4x}{x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$
b) $\lim_{x \to 0} \frac{4x^3-8x^2}{x^4-x^2}$
c) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)^x$
d) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$
e) $\lim_{x \to -4} \left(\frac{x^2+6x+8}{4x+4}\right)^{x+8}$
f) $\lim_{x \to 3} \frac{2x-5}{x-3}$
g) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^x$
h) $\lim_{x \to -2} \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)^x$
i) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x^2-2x+2}\right)^{x+1}$
j) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{6x-5}{2x+3}\right)^{x-4}$

29 Calcula los límites siguientes.

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x+2} - \frac{2x^2+x}{2x}\right)$
b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+2x^2+x}{x^3+3x^2+3x+1}$
c) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x+1}{x-3} - \frac{x^2-2}{x^2-9}\right)$
d) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{x-1}$
e) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4x+4}$

Continuidad

30 Calcula $\lim_{x \to -1} f(x)$, $\lim_{x \to 3} f(x)$ y $\lim_{x \to 6} f(x)$, siendo

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 8x & \text{si } x \leq 3 \\ x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

¿En qué punto es posible que $f(x)$ sea discontinua?

31 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x - 6}{x + 3}$

a) Calcula $f(-3)$.

b) Halla $\lim_{x \to -3} f(x)$.

c) ¿Es continua en $x_0 = -3$?

32 Estudia la continuidad de las funciones siguientes en los puntos que se indican.

a) $f(x) = x^2 + 1$ en $x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} + 2 & \text{si } x > 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x^2 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \\ 4x + 5 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ en $x_0 = -1$

d) $f(x) = \begin{cases} 5x - x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$

33 Comprueba si son continuas las siguientes funciones definidas a trozos y, en caso negativo, especifica el tipo de discontinuidad que presentan.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + x & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 4}{3} & \text{si } x \leq -1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x} & \text{si } x \geq 8 \\ 2x - 6 & \text{si } x < 8 \end{cases}$

34 Considera la función $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 + 2x - 3}$.

a) Calcula su dominio.

b) ¿Es continua en los puntos que no pertenecen al dominio?

c) Indica qué tipo de discontinuidad presenta en los puntos $x_0 = 1$ y $x_0 = -3$.

35 Estudia las posibles discontinuidades de la siguiente función y aclara de qué tipo son.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x + 1} & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 4x & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ \dfrac{x^2}{3} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

36 Si $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 6$ y $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 9$, ¿cuál es $\lim_{x \to 3} f(x)$?

37 En ocasiones, al hallar el límite de una función en un punto se calculan los límites laterales, pero otras veces, no.

¿En qué tipo de puntos conviene calcular esos límites laterales porque es posible que los resultados sean diferentes?

38 Explica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Una función es continua en un punto si existe el límite de la función en ese punto.

b) Si una función es constante, el límite de la función en cualquier punto es siempre el mismo.

c) Dos funciones con el mismo límite cuando $x \to +\infty$ son iguales.

d) El límite de una función en un punto puede tomar dos valores distintos.

39 La función f es continua en $\mathbf{R}$ y $f(5) = 9$. ¿Cuál es $\lim_{x \to 5} f(x)$?

40 Si $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ y $\lim_{x \to 2} g(x) = -1$, calcula:

a) $\lim_{x \to 2} (f - 2g)(x)$

b) $\lim_{x \to 2} [(f)^g](x)$

c) $\lim_{x \to 2} (f \cdot g)(x)$

d) $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

41 El dominio de una función, $f(x)$, es $\mathbf{R} - \{2\}$ y $\lim_{x \to 2} f(x) = -1$. ¿Es continua en $x_0 = 2$?

Si la respuesta es negativa, indica el tipo de discontinuidad que presenta.

42 Sabiendo que $\lim_{x \to -3} f(x) = 7$ y $g(7) = -2$, calcula $\lim_{x \to -3} (g \circ f)(x)$.

43 Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, calcula:

a) $\lim_{x \to +\infty} (f + g)(x)$

b) $\lim_{x \to +\infty} (f^g)(x)$

44 Si una función, $f(x)$, está acotada, ¿es posible que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$? ¿Y que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$?

PROBLEMAS PARA APLICAR

45 Jaime ha empezado a trabajar en el departamento de atención al cliente de una compañía de telefonía móvil. El número de llamadas diarias que atiende un empleado viene expresado por la siguiente función.

$$M(t) = \frac{72t}{t+9}$$

Donde t es el número de días que lleva trabajando.

¿Cuántas llamadas diarias atenderá Jaime cuando lleve mucho tiempo en esa compañía?

46 Cuando existían 3 000 000 de ejemplares de una especie vegetal, esta comenzó a ser atacada por una plaga. Con el paso del tiempo, su población en millones, $f(t)$, disminuyó según la función:

$$f(t) = \frac{3}{t^2+1}$$

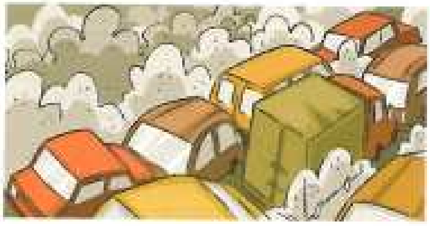
En la que t es el número de años transcurridos.

Cuando hayan transcurrido muchos años, ¿a qué valor tenderá el número de ejemplares?

47 Un determinado automóvil emite 121 gramos de CO_2 por cada kilómetro recorrido, x.

a) Escribe la fórmula que exprese la cantidad de gramos de CO_2 emitidos en función del número de kilómetros.

b) Según que el automóvil vaya recorriendo más kilómetros, ¿tenderá a estabilizarse la cantidad total de CO_2 emitida por este vehículo?



48 En una práctica de Química se ha medido la temperatura de una sustancia durante el transcurso de una reacción que dura 24 horas. Las medidas obtenidas se ajustan a esta función, donde t es el tiempo en horas.

$$T(t) = \begin{cases} t^2 - 11t - 2 & \text{si } 0 \leq t < 12 \\ 2t - 14 & \text{si } 12 \leq t < 15 \\ 64 - \dfrac{16}{5}t & \text{si } 15 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

Estudia si la temperatura anterior es una función continua.

49 En un país se ha estimado que la tasa de fecundidad, el número medio de hijos que tiene una mujer, va a evolucionar con el número de años transcurridos, t, según esta expresión.

$$f(t) = \frac{3t^2+6}{2t^2+3}$$

Con el paso del tiempo, ¿tenderá a estabilizarse este índice o aumentará?

50 En un hospital se está probando un tratamiento contra una enfermedad que reduce la vida media de los glóbulos rojos.

En los pacientes a los que se ha aplicado se ha encontrado que la vida media de los glóbulos rojos, V, varía dependiendo de la duración del tratamiento en días, t, según la expresión:

$$V(t) = \frac{132t}{t+1}$$

a) Si se empleara el tratamiento indefinidamente, ¿se podría alargar la vida de los glóbulos rojos de modo que nunca murieran?

b) La vida media de estas células en una persona sana es de 120 días. ¿En qué momento del tratamiento se alcanza esa cifra?

51 Durante una campaña publicitaria, la cantidad de unidades vendidas de un producto de limpieza, C, ha dependido del número de veces que ha aparecido su publicidad en televisión, x.

$$C(x) = 3000 - 10 \cdot 2^{1-x}$$

a) ¿Cuántas unidades se han vendido al aumentar al máximo posible su publicidad en televisión?

b) ¿Ha resultado beneficiosa la campaña?

52 A los 20 años de su fundación, una empresa realizó un cambio en la forma de realizar su contabilidad. En consecuencia, sus beneficios, en millones de euros, se calculan con esta función.

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{3t+10}{t} & \text{si } 0 < t \leq 20 \\ at - \dfrac{193}{2} & \text{si } t > 20 \end{cases}$$

Donde t es el número de años transcurridos.

¿Cuál debe ser el valor del parámetro a para que el cambio en los beneficios resulte continuo?

REFUERZO

Cálculo de límites

53 Calcula el valor de los siguientes límites en el infinito.

a) $\lim_{x\to+\infty}(1-5x+3x^4)$

b) $\lim_{x\to-\infty}(x^2+8x)$

c) $\lim_{x\to-\infty}(2x^3+x-6)$

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+12}{2x^2-1}$

e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x+5x^2}{6x^3-x}$

f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+9x+2}{6x^4-x^2+1}$

54 Resuelve estos límites.

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{2x+8}\right)^x$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-7}\right)^{x+1}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+4}\right)^x$

55 Halla los límites que siguen.

a) $\lim_{x\to-2}(x^3-x^2+4x-1)$

b) $\lim_{x\to-1}(x+x^2)^{2x}$

c) $\lim_{x\to3}\frac{x^3-13x+12}{x^2-3x-18}$

d) $\lim_{x\to9}\frac{2x}{x-9}$

e) $\lim_{x\to4}\frac{x^2-2x-8}{x-4}$

f) $\lim_{x\to-5}\frac{x+5}{x^2+6x+5}$

g) $\lim_{x\to0}\frac{x-x^3}{2x^2+5x}$

h) $\lim_{x\to0}\frac{4x^2-1}{2x^2}$

Continuidad

56 Estudia si son continuas las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x)=\begin{cases}-9 & \text{si } x=-2\\ 7+2x^2 & \text{si } x\neq-2\end{cases}$ en $x_0=-2$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-8x & \text{si } x<1\\ 3x-10 & \text{si } x\geq1\end{cases}$ en $x_0=1$

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{9} & \text{si } x>-3\\ 1-x^2 & \text{si } x\leq-3\end{cases}$ en $x_0=-3$

d) $f(x)=\begin{cases}4-2x & \text{si } x<5\\ -6 & \text{si } x=5\\ -x^2+5x-6 & \text{si } x>5\end{cases}$ en $x_0=5$

57 Dada la función $f(x)=\frac{x-2}{4x-8}$:

a) Calcula $f(2)$.

b) Halla $\lim_{x\to2}f(x)$.

c) Explica si es una función continua en $x_0=2$, indicando en caso contrario el tipo de discontinuidad que presenta.

58 Explica si la función $f(x)=\frac{x^2+5x+4}{x+4}$ tiene una discontinuidad evitable en $x_0=-4$.

AMPLIACIÓN

59 Calcula:

a) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{7x^3-2x^2+9x}$

b) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^4-3x^3-3x^2+11x-6}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x+2}}{3x}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{8x+3}{x-1}}$

e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-8x}{\sqrt{x^4+2}}$

f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-4x}{5-4x}\right)^{\frac{1-x^2}{3x}}$

g) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x}\right)^x$

60 Indica los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=\frac{x^2-x-12}{x^3+2x^2-3x}$ y señala en cada caso el tipo de discontinuidad que presenta.

61 ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $f(x)=\frac{x^2-9x+14}{x-2}$? ¿Cómo se podría definir para que fuera continua en todo **R**?

62 Estudia si es evitable la discontinuidad de la siguiente función.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+2x+1}{x-1} & \text{si } x<1\\ 3x-1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

Defínela, si es posible, de modo que resulte continua en todo **R**.

63 Analiza si es continua esta función, indicando en su caso el tipo de discontinuidad que presenta.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+2x}{x} & \text{si } x\leq1\\ \frac{2x^2+x-3}{4x^2-3x-1} & \text{si } x>1\end{cases}$$

64 Calcula el valor que debe tener a para que sean correctos estos límites.

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax^4+5x+9}}{2x^2-1}=2$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-1}{ax}-\frac{x^2+3}{x-1}\right)=-1$

> a c t i v i d a d e s

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

65 El precio de los cuadernos

Una papelería presenta la siguiente oferta para estudiantes en la compra de cuadernos.

- El precio de cada uno es de 2,25 euros.
- Si se compran ocho o más, el precio P de todo el lote es el determinado por la función:

$$P(x) = \sqrt{5x^2 + 3}$$

Donde x es el número de cuadernos comprados.

a) Calcula el precio que se ha de pagar para comprar 5, 10 y 15 unidades.

b) La función que representa el precio de x cuadernos, ¿es continua?

c) Halla el precio de cada cuaderno si se compran 5, 10 ó 15 unidades.

d) ¿Cuál sería el precio de cada cuaderno si se comprasen una gran cantidad de ellos?

e) Un cliente duda de si se trata de una verdadera oferta o de una estrategia publicitaria. ¿Crees que se produce un descuento apreciable cuando se compran más de ocho cuadernos?

66 Población de bivalvos

Ante la peligrosa proliferación de una especie de bivalvos en las aguas fluviales de una región, las autoridades sanitarias han tomado ciertas medidas que pretenden conseguir que la población de estos animales se adapte a la siguiente relación.

$$p(x) = \frac{ax + 1250}{3x + b}$$

Donde x es el tiempo transcurrido en meses desde que se toman las citadas medidas, y $p(x)$, el número de ejemplares de esa especie por cada metro cuadrado de superficie de río.

Los parámetros a y b serán determinados por los expertos teniendo en cuenta que:

- El número inicial de bivalvos por metro cuadrado es aproximadamente de 250.
- Se desea que, con el paso del tiempo, la población se estabilice en unos 100 ejemplares por metro cuadrado.

Calcula el valor de dichos parámetros.

AUTOEVALUACIÓN

1 Calcula los siguientes límites en el infinito.

a) $\lim_{x \to -\infty} (6 - x + x^3)$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^2 + 4x^3}{6x^3 + 7x - 1}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x + 5}{2x + 1}\right)^{\frac{x}{2}}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{4}{x^2 + 7}\right)^{x^2+3}$

e) $\lim_{x \to +\infty} (-2x^4 - 9x^2 + 4)$

f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4 - 2x + 4}{3x^4 - 9x^3}$

g) $\lim_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{x}\right)^x$

h) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x + 2}{5x - 3}\right)^{x+1}$

2 Halla los límites que se indican.

a) $\lim_{x \to -2} \left(3 + x^2 - \frac{x^3}{8}\right)$

b) $\lim_{x \to 5} (2x - 9)^{[illegible]}$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4x}{x - 2}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^3 - x}{x^4 - 3x^3}$

f) $\lim_{x \to -1} \frac{4x^2 + 5x + 1}{x^3 + 1}$

g) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 15}$

h) $\lim_{x \to -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 6x + 5}$

3 Estudia si las siguientes funciones son o no continuas.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x \neq -3 \\ 10 & \text{si } x = -3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - 1 & \text{si } x \leq 6 \\ 2 - x & \text{si } x > 6 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x + 2} & \text{si } x < -2 \\ -3 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ 4x - 2x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

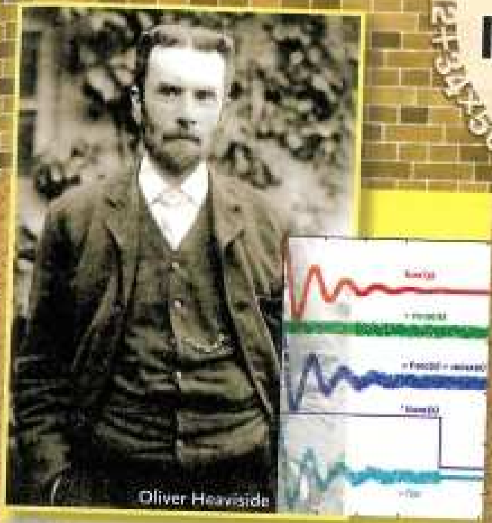
4 ¿Qué tipo de discontinuidad presentan estas funciones?

a) $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$ en $x_0 = -3$

b) $f(x) = \frac{4x + 3}{x - 6}$ en $x_0 = 6$

c) $f(x) = \begin{cases} 2 + 3x - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - 5x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

MURAL DE MATEMÁTICAS



Oliver Heaviside

La función escalón

En numerosos procesos de ingeniería de control se necesita trabajar con señales discontinuas, que se activan en determinadas condiciones y momentos, y se mantienen de forma indefinida.

Ocurre, por ejemplo, cuando una fuerza externa que actúa sobre un sistema mecánico o una tensión eléctrica aplicada a un circuito puede tener que suspenderse después de cierto tiempo y en mecanismos, como muchos electrónicos, donde existen dos estados posibles (sí o no, o bien activo o inactivo). Para tratar de forma efectiva con estas funciones discontinuas conviene introducir una función especial llamada función escalón unitario o función de Heaviside. Oliver Heaviside (1850-1925), nacido en Londres, Inglaterra, había adquirido en su temprana juventud gran experiencia práctica como operador de telégrafo y se había interesado también por los trabajos de Maxwell, simplificando sus ecuaciones como había hecho Hertz. Cuando presentó su trabajo a la Royal Institution, no lo aceptaron por su "falta de rigor matemático". Heaviside replicó: "Bien, ¿y qué? ¿Dejaré de cenar porque no entiendo con todo detalle el proceso de la digestión?" Hertz reconoció la valía de su aportación en su tratado sobre electricidad.

EL DESCUBRIDOR DE LA CONTINUIDAD

Bernhard Bolzano (1781 - 1848), matemático, filósofo y cura de Bohemia, ofreció en 1817 una definición de continuidad muy rigurosa semejante a la que nosotros usamos hoy día, y definió la derivada por primera vez como un límite. Además, se percató de la diferencia entre continuidad y derivabilidad; más aún, en 1834 dio un ejemplo famoso de función continua no derivable en ningún punto, resultado que no fue reconocido en su época, aunque en los años que siguieron se ofrecieron muchos ejemplos de funciones continuas no derivables.

De esta manera, se fue precisando el concepto de función y ofreciendo a la comunidad matemática múltiples posibilidades en su construcción y sus aplicaciones. Años después, la investigación de los fenómenos físicos naturales ha demostrado que la mayoría de las funciones matemáticas ideadas para describirlos son de naturaleza continua. Por ejemplo, las ecuaciones fundamentales de la dinámica y el electromagnetismo clásicos siguen el modelo de las funciones continuas; en cambio, en las teorías contemporáneas de la mecánica relativista y la física cuántica aparece el concepto de singularidad como un elemento esencial de discontinuidad en los modelos físicos y cosmológicos.

Matetiempos

El aterrizaje de un avión

Construye un gráfico que represente la altura de un avión desde que empieza la operación de aterrizaje hasta que se posa en la pista. ¿A qué valor tiende la función que representa este gráfico?

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:
Miguel R. Wilhelmi, Departamento de Matemáticas